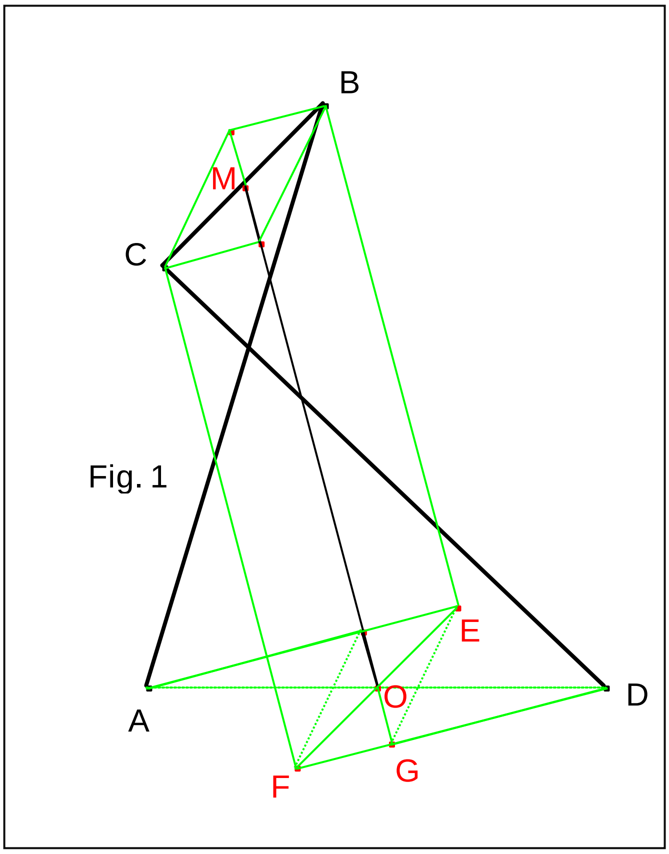
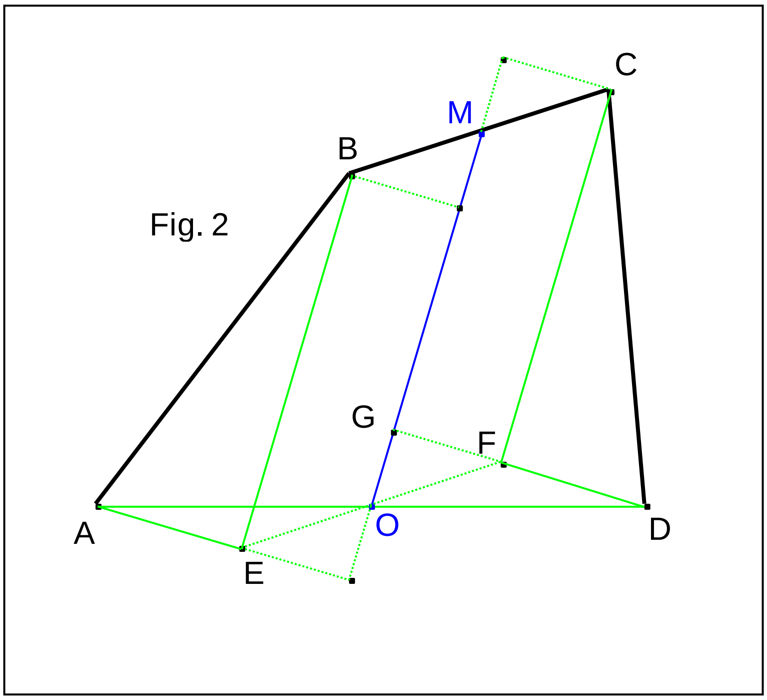
Curva di Watt (***Sistema a tre aste***)
(*Tchebicheff*)





Consideriamo il sistema articolato a tre aste di Fig. 1, oppure quello rappresentato in Fig. 2. I perni A e D sono fissi, AB = CD. Le cerniere B e C sono gli estremi della biella BC,di cui M è punto medio. Si chiede: quale curva viene descritta da M durante il movimento del sistema articolato?
Sia in Fig. 1 che in Fig. 2 ABCD è un quadrilatero con due lati opposti uguali. Vale il teorema:
"*Se un quadrilatero ha due lati opposti uguali: 1° questi lati sono ugualmente inclinati sulla mediana degli altri due; 2° la proiezione di ciascuno di essi sulla mediana risulta di lunghezza uguale alla mediana stessa*".
Dimostrazione:
Tracciamo le rette BE, CF parallele alla mediana MO; per il punto O conduciamo EOF parallela a BC; infine, tracciamo le rette AE, DF.
Per costruzione, BEOM, MOFC sono parallelogrammi;
dunque BE = OM = CF,
OE = BM =MC = OF.
I triangoli AOE, DOF sono uguali (angoli uguali – opposti al vertice- compresi fra lati corrispondenti uguali). Quindi AE = DF. Inoltre, queste

due rette sono parallele (angoli alterni interni OAE, ODF uguali fra loro). Conseguentemente, i triangoli ABE, DCF sono uguali (lati corrispondenti uguali): segue che gli angoli ABE e DCF sono uguali.
La collocazione rispettiva dei loro lati ci assicura poi che gli angoli AEB, DCF sono supplementari: essendo essi anche uguali, sono evidentemente retti. Infine le rette BE, CF, uguali alla mediana MO sono uguali e parallele alle proiezioni su MO di AB, CD. Ciò appunto volevasi dimostrare.

Equazione della curva descritta da M. Si ponga AO = OD = a; AB = CD = = b; BM = CM = c. Scegliamo un sistema di coordinate polari con polo in O, raggio vettore ρ = OM, argomento MOD = α
Dal triangolo rettangolo CFD si ricava:

$$\rho^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{FD}^2$$

Per valutare FD, consideriamo l'intersezione G della retta FD con OM. E' chiaro che

$$\mathbf{FD} = \mathbf{DG} \pm \mathbf{FG} = \mathbf{asen}\alpha \pm \mathbf{FG}, \qquad \mathbf{FG} = \sqrt{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 \cos^2\alpha}$$

(si userà il segno + nel caso della Fig. 1, il segno − nel caso della Fig. 2).
L'equazione richiesta è dunque:

$$\rho^2 = \mathbf{b}^2 - \left(\mathbf{asen}\alpha \pm \sqrt{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 \cos^2\alpha}\right)^2$$

o anche

$$(*) \rightarrow \mathbf{b}^2 - \rho^2 = \left(\mathbf{asen}\alpha \pm \sqrt{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 \cos^2\alpha}\right)^2$$

La (*) (elevando al quadrato e semplificando) si può scrivere nella forma seguente:

$$(**) \qquad (\mathbf{b}^2 - \rho^2 - \mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2)^2 = 4\mathbf{a}^2(\mathbf{b}^2 - \rho^2)\mathbf{sen}^2\alpha\,.$$

Poiché

$$\mathbf{sen}^2\alpha = \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}$$

$$\rho^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2$$

sostituendo nella (**) si ottiene l'equazione cartesiana

$$(1) \qquad (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)^2 = 4\mathbf{a}^2\mathbf{y}^2(\mathbf{b}^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\,.$$

La (1) rappresenta il luogo dei punti M. Si tratta di una curva del sesto grado, che possiede un ramo ***a lunga inflessione*** (sovrapponibile

praticamente a un segmento di retta) in direzione parallela al lato AD (da noi scelto come asse delle x).