Inversore di Hart

(*Cfr. Gabriel Koenigs, "Leçons de Cinématique", Paris, 1897*).

Sia ABCD un antiparallelogramma articolato (A, B, C e D sono dunque cerniere); siano P, Q, R, S quattro punti che, in corrispondenza a una particolare configurazione del parallelogramma, si trovino su una stessa retta parallela alla direzione comune alle diagonali AC e BD.
Si constata facilmente che questi punti restano sempre allineati su una medesima parallela a tali diagonali durante la deformazione dell'antiparallelogramma.

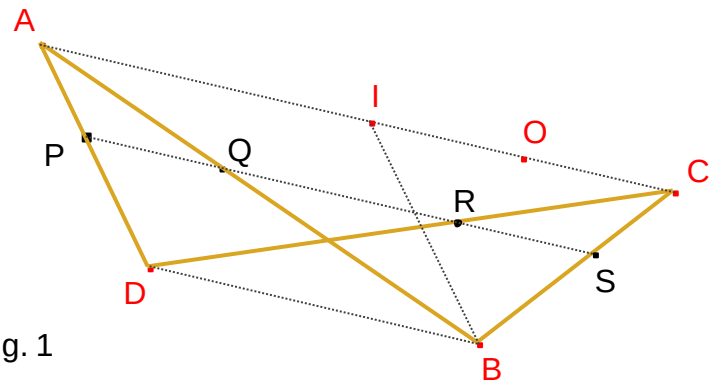

Fig. 1

I triangoli simili APQ, ADB e DPR, DAC forniscono le proporzioni:
(1)→ PQ : AP = DB : AD (2)→PR : PD = AC :AD
Da (1) e (2), con semplici passaggi, si ricava:

$$\mathbf{(3)} \rightarrow \mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \frac{\mathbf{PA} \times \mathbf{PD}}{\mathbf{AD}^2} \times \mathbf{BD} \times \mathbf{AC}$$

Tracciamo ora BI in direzione parallela a DA; la figura AIBD è un parallelogramma, sicché BD = AI e IBC è un triangolo isoscele. Quindi il piede della perpendicolare abbassata da B su IC è il punto medio di IC. Allora si ha:

$$\mathbf{(4)} \rightarrow \mathbf{BD} \times \mathbf{AC} = \mathbf{AI} \times \mathbf{AC} = (\mathbf{AO} - \mathbf{OI})(\mathbf{AO} + \mathbf{OI}) = \mathbf{AO}^2 - \mathbf{OI}^2$$

Ma dai triangoli rettangoli BAO e BIO si ricava

$$\mathbf{(5)} \rightarrow \mathbf{AB}^2 = \mathbf{AO}^2 + \mathbf{OB}^2$$

$$\mathbf{(6)} \rightarrow \mathbf{BC}^2 = \mathbf{BI}^2 = \mathbf{OI}^2 + \mathbf{OB}^2$$

Sottraendo (6) da (5):

$$\mathbf{(7)} \rightarrow \mathbf{AB}^2 - \mathbf{BC}^2 = \mathbf{AO}^2 - \mathbf{OI}^2 = \mathbf{BD} \times \mathbf{AC}$$

Riscriviamo la (3) tenendo conto della (7) (ricordare che AD = BC)

$$\mathbf{(8)} \rightarrow \mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \frac{\mathbf{PA} \times \mathbf{PD}}{\mathbf{AD}^2} \times (\mathbf{AB}^2 - \mathbf{AD}^2)$$

La (8) dimostra che il prodotto PQ × PR è costante. Se dunque si costringe l'asta AD a ruotare attorno a un perno fissato in P, e se si fa descrivere una figura geometrica al punto Q, il punto R descriverà la figura inversa. Quindi, se Q descrive una circonferenza passante per P la traiettoria di R sarà rettilinea.
Si dimostra in modo analogo che anche il prodotto QP × QS è costante: e così, piazzando in Q il perno, i punti P ed S descriveranno ancora due figure inverse, ma con potenza di inversione negativa.

Questo dispositivo di Hart, come quello – storicamente anteriore – di Peaucellier, utilizza l'inversione circolare per realizzare una guida rettilinea matematicamente esatta. Si noti tuttavia che in pratica, a causa delle inevitabili imprecisioni costruttive, anche questi sistemi articolati (se costruiti fisicamente) realizzano traiettorie solo approssimativamente rettilinee: quindi, da un punto di vista meccanico, sono perfettamente equivalenti a quelli che forniscono guide approssimate. La scelta di impiegare gli uni anziché gli altri sarà dunque orientata da criteri che mettono in secondo piano la correttezza matematica della soluzione.