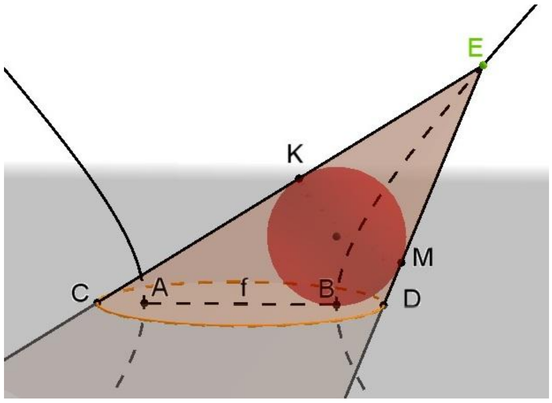
Coniche focali: teorema di Apollonio

Una ellisse (o una iperbole) è sezione di infinite superfici coniche rotonde.
Il luogo dei vertici di tali superfici è l'iperbole (ellisse) focale della ellisse (iperbole) data: cioè una conica (a centro) situata in un piano perpendicolare a quello che sostiene la curva data e avente per vertici e fuochi rispettivamente i fuochi e vertici di essa.

Primo caso



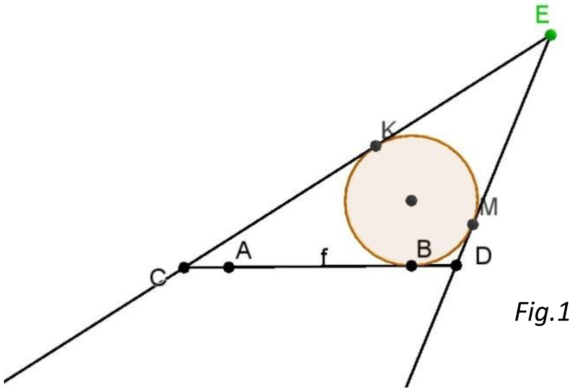


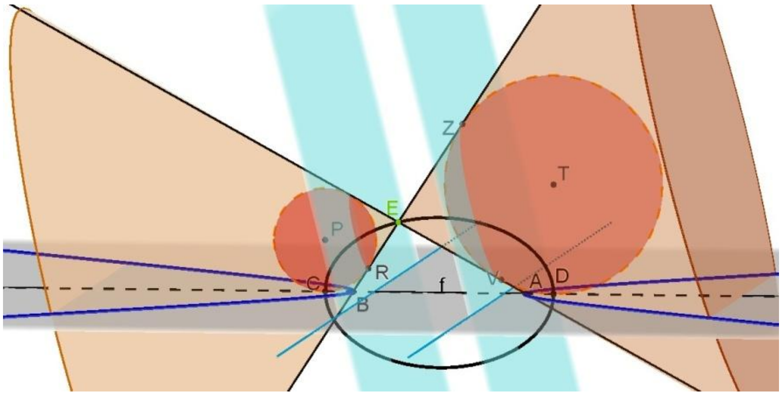
Fig.1

CDE è il triangolo assiale di un cono rotondo; AB l'asse focale della ellisse sezione del cono con un piano perpendicolare a CDE; la circonferenza per M,B e K (fig.1) è la sezione della sfera di Dandelin con il piano di CDE, B un fuoco della ellisse. Per note proprietà delle tangenti ad una circonferenza si ha:

EC-ED=KC-MD=BC-DB = costante.

Perciò il luogo di E nel piano del triangolo assiale è un ramo di iperbole di fuochi C e D e un vertice in B.

Secondo caso



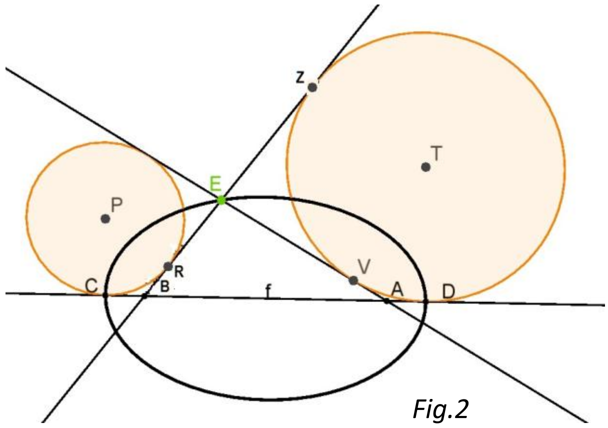


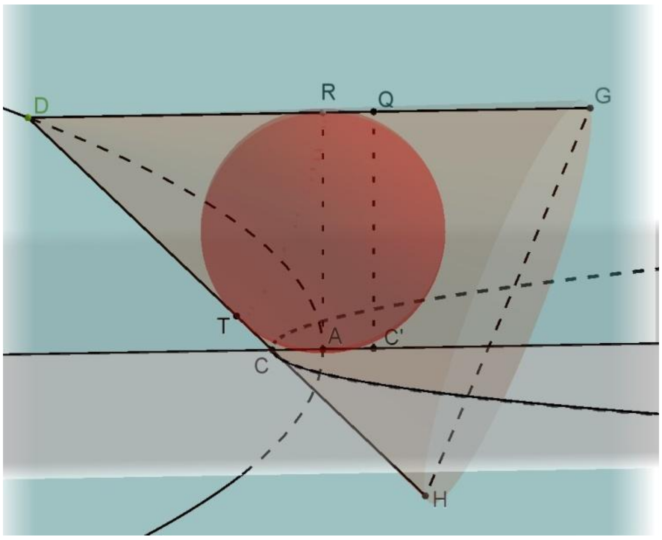
Fig.2

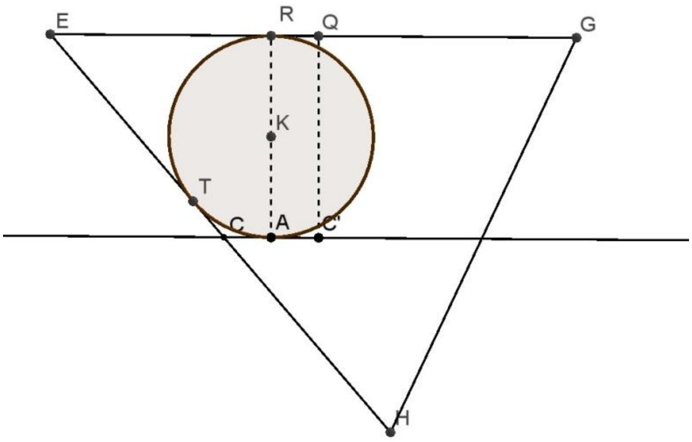
Le circonferenze (fig.2) rispettivamente di centro T e passante per Z e D, e di centro P e passante per C ed R, sono le sezioni delle sfere di Dandelin inscritte nel cono e tangenti al piano su cui giace l'iperbole, con il piano per il vertice E del cono e perpendicolare al piano dell'iperbole. I punti di contatto C e D con il piano dell'iperbole sono i fuochi dell'iperbole (teorema di Dandelin) . Per le proprietà delle tangenti ER+RB=ER+BC; EV+VA=EV+AD quindi

EB+EA=ER+BC+EV+AD=(ER+EZ)+BC+AD=RZ+BC+AD=cost.

RZ è costante in quanto segmento compreso fra due piani paralleli (i piani dei cerchi di contatto sfera-cono) e sempre ugualmente inclinato rispetto ad essi.

Terzo caso





Sia EGH il triangolo per l'asse di un cono rotondo , C il vertice della parabola intersezione del cono con un piano perpendicolare ad EGH. La sfera di Dandelin inscritta nel cono è tangente al piano della parabola nel punto A, fuoco della parabola. Sia C' il punto simmetrico di C rispetto ad A. Per la proprietà delle tangenti si ha :

EC=ET+TC=ET+CA=ER+RQ.

Quindi E, vertice del cono, è equidistante da C e dalla retta per C' parallela al diametro AR, e ne consegue che appartiene alla parabola, giacente nel piano perpendicolare a quello della parabola sezione e passante per l' asse di quest'ultima, con fuoco in C e direttrice la retta per C' perpendicolare alla retta per C ed A.