

## PROSPETTIVA E TRASFORMAZIONI

### (Introduzione)

Descriviamo (in brevissima sintesi) uno dei numerosi percorsi storici in cui la teoria delle trasformazioni (sviluppatasi soprattutto nell'Ottocento) affonda le sue radici: quello vincolato agli studi di prospettiva.

1. Nel periodo “creativo” iniziale (Brunelleschi, Masaccio, Alberti, Piero della Francesca...) era convinzione largamente condivisa che la prospettiva lineare intesa come scienza geometrica fosse il fondamento dell'arte. Lo stretto rapporto che si era così stabilito fra ricerca teorica e attività pratica degli artisti (i primi codificatori delle regole prospettiche erano pittori o architetti) ha tuttavia conosciuto in seguito (pur mantenendo una certa continuità) fasi più o meno acute di crisi: la comunicazione fra teorici e pratici è diventata più difficile, si è a volte interrotta. Ci sono molte ragioni che concorrono a spiegare questa progressiva separazione tra sperimentatori e scienziati. Era inevitabile intanto la nascita di un contrasto tra esigenze dell'invenzione e costrizioni imposte dalle regole (Michelangelo sosteneva che un artista deve avere “*le seste negli occhi*”, piuttosto che affidarsi a procedimenti matematici)<sup>1</sup>. Le opere a stampa sulla prospettiva (i manoscritti avevano circolazione limitata) comparvero abbastanza tardi in Italia, verso la metà del Cinquecento: consolidate “pratiche di bottega” potevano così prevalere sui nuovi metodi messi a punto dai geometri. In qualche caso, ebbero effetto le pressioni controriformistiche che invitavano a concentrarsi sui contenuti dell'opera d'arte più che sui virtuosismi tecnici. Inoltre molti scienziati non riuscirono mai a raggiungere, nelle figurazioni esemplificative inserite nelle loro opere, il livello qualitativo e la capacità espressiva degli incisori che illustravano testi più semplici, per uso empirico immediato. Ma il fatto fondamentale è forse un altro: gli studiosi con prevalenti interessi matematici collegavano spesso il tema della prospettiva (come scienza dell'arte) a quello più generale della rappresentazione in piano di oggetti tridimensionali, quale si presentava in numerose altre attività tecniche e produttive: ad esempio nelle proiezioni cartografiche (rappresentazione della sfera celeste, della terra, del sole, della luna) o nella gestione di “fabbriche” per fortificazioni militari, opere idrauliche, cattedrali e palazzi. La matematica della prospettiva si è perciò sviluppata, nel tempo, ben oltre le esigenze (e le possibilità di comprensione) di molti artisti (che preferivano, e chiedevano, manuali di facile accesso) trasformandosi in una teoria astratta delle proiezioni: e, col passare degli anni, si è quindi trasferita dalle mani “*degli inventori, tutti artisti con forti simpatie per la scienza*” a quelle “*dei codificatori, tutti scienziati solo talvolta attenti alle esigenze dell'arte*”.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Cfr. G.P. Lomazzo, *Trattato dell'arte della Pittura, scultura e architettura*, Milano 1584; *Idea del tempio della pittura*, Milano 1590, in R. P. Ciardi, *Scritti sull'arte*, Firenze 1973.

<sup>2</sup> Cfr. L. Vagnetti, *De Naturali et Artificiali Perspectiva*, Firenze 1979, pag. 290

2. Esaminando la letteratura sulla prospettiva, già nel Cinquecento si può notare una caratteristica alternanza di *“testi che possono essere definiti ‘facili’ e di testi che devono essere definiti ‘difficili’: al limite dell’empiria gli uni, al limite dell’astrazione incomprensibile per i non iniziati gli altri”*.<sup>3</sup> Rari i punti di equilibrio: uno dei migliori può registrarsi nei *Commentari sulle due Regole della Prospettiva pratica*, opera di divulgazione ben illustrata, con notevoli pregi didattici e nello stesso tempo rigorosa, dovuta alla collaborazione di J. Barozzi (architetto) ed E. Danti (matematico e cartografo).<sup>4</sup> Invece trattati come quelli di Commandino, Benedetti e Guidubaldo del Monte<sup>5</sup> sono meno discorsivi, spesso di ardua lettura: ma con essi *“assistiamo alla nascita della geometria proiettiva come disciplina autonoma: posta ancora in relazione con la scienza dei pittori ma sempre più separata da questa nei suoi mezzi e nei suoi fini”*.<sup>6</sup> Si tratta di opere che pongono le basi per future interazioni, sempre più strette, tra la prospettiva e altri terreni su cui il pensiero matematico – geometrico, in corso di evoluzione, stava allora esercitandosi con metodi nuovi. E’ quindi opportuna qualche breve informazione.

- a) Il trattato del Commandino (1558) si presenta come “Commentario al Planisfero di Tolomeo e di Giordano Nemorario”: prende in esame quella che poi sarà chiamata proiezione stereografica della sfera celeste (si rivolge quindi a un pubblico di astronomi - matematici). Vi viene svolta nella terza parte, con metodi originali, una teoria generale delle proiezioni. E’ studiata in particolare l’immagine prospettica di un cerchio al variare del punto di vista (si può ottenere ancora un cerchio, oppure una delle tre coniche): la trattazione (in cui viene considerato il cono che ha vertice nell’occhio dell’osservatore e proietta il cerchio) usa il concetto di triangolo per l’asse e una particolare posizione di tale triangolo rispetto al diametro del cerchio, quindi non è ancora del tutto generale. (Qualche tempo dopo, nel suo commento all’Analemma di Tolomeo, pubblicato nel 1563, Commandino prenderà in esame anche le proiezioni di un cerchio mediante raggi paralleli).
- b) Il trattato del Benedetti (*De rationibus operationum Perspectivae*) (1580), brevissimo (solo 22 pagine), è inserito in un’opera di miscellanea matematica *“compilata allo scopo dichiarato di rettificare alcuni procedimenti empirici allora ancora in uso tra gli artisti”*. Ma le sue costruzioni sono molto astratte:

<sup>3</sup> Cfr. L. Vagnetti, op. cit., ibidem.

<sup>4</sup> J. Barozzi, *Le due regole della Prospettiva pratica* di M.J.B. da Vignola con i commentari del R.P.M. Egnatio Danti dell’ordine dei Predicatori, Matematico nello studio di Bologna, Roma 1583.

<sup>5</sup> F. Commandino, *Ptolomaei Planisphaerium, Jordani Planisphaerium, Federici Commandini Urbinatis in Planisphaerium commentarius, in quo universa Scenografices ratio quam brevissime traditur, ac demonstrationibus confirmatur*, Venezia 1558; G. B. Benedetti, *De rationibus operationum perspectivae*, in *Diversarum speculationum mathematicarum et Philosophicarum liber*, Torino 1580; G. Del Monte, *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis perspectivae Libri sex*, Pesaro 1600.

<sup>6</sup> M. Kemp, *La scienza dell’Arte*, Firenze 1994, pag. 99

“egli non si fonda su considerazioni relative ai processi fisici della visione, e non fa alcuna concessione alle necessità del pittore”<sup>7</sup>.

- c) Quando Guidubaldo Del Monte pubblicò nel 1600 il suo fondamentale trattato di Prospettiva, aveva già indagato a fondo (*Planisphaeriorum universalium theorica*, 1579) il problema della proiezione ortografica, e dimostrato che le sezioni del cilindro sono ellissi (ponendo le basi per la identificazione del cilindro come cono particolare, con vertice a distanza infinita).<sup>8</sup> Nei *Perspectivae Libri Sex*, egli definisce il “punto di concorso” per qualsiasi fascio di rette parallele e la “linea dell’orizzonte” come insieme dei punti di concorso; utilizza il ribaltamento del quadro (da lui chiamato “sezione”) sul piano di terra (“piano soggetto” nella sua nomenclatura), movimento da cui, attraverso analisi più approfondite, nascerà in seguito il concetto di omologia; fornisce una bellissima costruzione della prospettiva di un triangolo (nella quale “è implicato uno dei teoremi fondamentali della geometria proiettiva”<sup>9</sup> (ora noto come teorema dei triangoli omologici) che sarà enunciato esplicitamente da Desargues nel 1639; applica la medesima costruzione per ottenere la prospettiva di un cerchio. Inoltre, affronta in alcuni casi particolari il problema della restituzione prospettica, fornisce numerosi spunti per una trattazione scientifica della scenografia, dà una teoria completa delle ombre (sorgenti a distanza finita). “Osservando il suo schema dell’ombra proiettata da una sfera illuminata da una sorgente puntiforme, è facile comprendere perchè i problemi delle proiezioni astronomiche, delle meridiane, delle coniche e della prospettiva si siano tanto intrecciati”<sup>10</sup>.

3. Nei secoli XVII e XVIII l’attività degli sperimentatori si allarga, riservando spazi sempre più ampi agli artifici, alle applicazioni bizzarre e curiose (anamorfosi, scenografia, raffigurazioni illusionistiche). Viene mantenuto sia il dualismo tra teorici e pratici, sia l’intreccio (e la divisione dei compiti) tra manuali operativi (senza cura per le dimostrazioni), testi con finalità esplicitamente didattiche, trattati rigorosi (redatti “more geometrico”).

Non si può più parlare, in questo periodo, di un primato dell’Italia (che esisteva invece nel Cinquecento): le ricerche spostano dapprima il loro centro nei Paesi Bassi e in Francia, poi si estendono all’Inghilterra e a tutta l’Europa.

In questa lunga fase di sviluppo la teoria delle proiezioni assorbe gradualmente i metodi che (con l’uso congiunto dell’algebra e del movimento) aprono nuovi terreni di esercizio al pensiero matematico.

Studiando i ribaltamenti del quadro sopra il piano di terra, cioè quei movimenti che portano (come diceva Benedetti) dal “corporeo” (configurazione

<sup>7</sup> M. Kemp, op. cit., pag. 101; cfr. anche L. Vagnetti, op. cit., pag. 303.

<sup>8</sup> Le proiezioni ortografiche dei cerchi (meridiani o paralleli della sfera) sono ellissi: ma all’epoca di G. Del Monte venivano ancora considerate da molti come “curve anomale”, non come coniche.

<sup>9</sup> Cfr. M. Kemp, op. cit., pag. 104.

<sup>10</sup> Cfr. M. Kemp, op. cit., pag. 106.

tridimensionale) al “superficiale” (configurazione piana), Stevin scoprirà infatti i suoi teoremi, fondamentali (assieme ai successivi studi di De La Hire) per la genesi del concetto di omologia. In seguito Lambert inventerà meccanismi che, pilotando punte scriventi collegate in modo opportuno, tracciano contemporaneamente, sul medesimo piano, due figure di cui una è immagine prospettica dell’altra (noi ora diciamo: corrispondenti in una omologia). La prospettiva sarà poi applicata allo studio delle coniche e di altre curve piane, ad esempio con i lavori di De La Hire, Desargues, Pascal <sup>11</sup> e quelli successivi di Newton e Jacquier relativi alla “*generatio curvarum per umbras*”<sup>12</sup>. Vengono così sollevati temi e problemi su cui poi si confronteranno metodi sintetici e analitici (storicamente destinati ad integrarsi reciprocamente): la teoria delle proiezioni (resasi ormai completamente autonoma da preoccupazioni legate alla rappresentazione illusionistica della realtà, all’imitazione del mondo naturale) dà origine a nuovi concetti e nuove tecniche dimostrative (elementi impropri del piano, invarianti per proiezione e sezione, ecc.), e cominciano anche ad apparire (in forma iniziale, sotto altro nome, come strumento per trasformare curve) le equazioni dell’omologia. Infine, si ampliano e rafforzano i legami coi sistemi tecnici (assonometria, proiezioni quotate, ecc.). Tutti i risultati ottenuti saranno riorganizzati e codificati, con le opere di Monge e Poncelet, in scienze del tutto nuove (geometria descrittiva e proiettiva). Su questo primo punto d’arrivo, e sui contributi derivanti da altri filoni di ricerca, si innesterà nel XIX secolo, ristrutturando profondamente il pensiero geometrico, la teoria delle trasformazioni

---

<sup>11</sup> Ricordiamo: **G. Desargues**, *Exemple de l’une des manières universelles du S. G. D. L. touchant la pratique del perspective sans employer aucun tiers point de distance ny d’autre nature, qui soit hors du champ de l’ouvrage*, Parigi 1636; *Brouillon project d’une exemple d’une manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l’Architecture*, Parigi 1640; *Brouillon Project d’une atteinte aux événements des rencontres d’un cone avec un plan*, Parigi 1639. **B. Pascal**, *Essai pour les Coniques*, Parigi 1640. **De La Hire**, *Nouvelle Methode en géometrie pour les Sections des Superficies coniques et Cylindriques qui ont pour bases des Cercles, ou des Paraboles, des Ellipses et des Hyperboles*, Parigi 1673; *Nouveaux éléments des Sections Coniques, les lieux géométriques, la construction ou effectation des Equations*, Parigi 1679; *Sectiones Conicae*, 1685.

<sup>12</sup> Una stretta relazione lega il metodo di De La Hire per determinare (con operazioni svolte con riga e compasso nel piano) l’immagine prospettica di un punto (dopo aver assegnato in posizione punto di vista e quadro) a quello illustrato da Newton nei *Principi Matematici della Filosofia Naturale*. L’esistenza di questa relazione è messa in evidenza per la prima volta in una Nota di M. Chasles (*Aperçu Historique*, 1837).