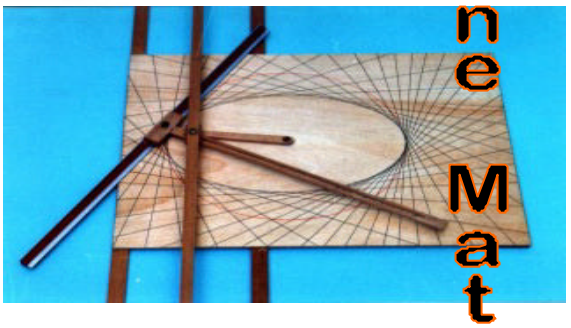


Le Macchine Matematiche

Corso di formazione

La matematica attraverso la sperimentazione con le macchine

Una scommessa per il futuro!

Bologna 20/02/2014 – 13/03/2014

Terza edizione

Bologna 29 Giugno 2014
P.G. n. 118288/14 del 29.07.2014 – C.L. 21.10.0/02/2014

A cura di: Annalina Marsili referente Area Formazione e Ricerca Centro ANEKA/Istituzione G.F.Minguzzi

Indice

Premessa	3
La cornice di riferimento	4
La formazione: Programma e contenuti	5
Tipologia e Presenza dei partecipanti	8
Il senso del percorso	10

ALLEGATI

Il materiale didattico	12
Analisi dati	33

A CURA DI

PROVINCIA DI BOLOGNA

Provincia di Bologna
Istituzione Gian Franco Minguzzi

Premessa

Il presente report vuole essere innanzitutto una breve testimonianza del lavoro e dell'impegno personale di tutti coloro che hanno lavorato alla realizzazione di questo breve intervento formativo. Tale formazione è stata offerta -come nel 2011- per dare la possibilità a gli insegnanti di matematica, scienze e tecnologie delle scuole superiori e degli istituti comprensivi della città di Bologna e Provincia, che non hanno avuto l'opportunità di frequentare il corso realizzato nel 2010, ma soprattutto per dare maggiore visibilità al laboratorio di matematica e alle sue macchine.

Il laboratorio è un patrimonio da non trascurare, che permette di prenotare e prendere in prestito le macchine (la maggior parte sono pantografi) per poi lavorare in classe con i ragazzi per la risoluzione di problemi prevalentemente di geometria.

Il corso si è concretizzato grazie alla collaborazione intercorsa tra l'Istituzione "G.F.Minguzzi" e il dirigente dell' I.I.S. "Crescenzi – Pacinotti" del Comune di Bologna, l'Università di Modena e Reggio Emilia, l'Associazione Macchine di Matematica di Modena e due insegnanti che avevano partecipato al corso regionale nell'anno 2010 e che per l'occasione hanno dato la loro disponibilità a formare i nuovi colleghi. Da sottolineare che il corso ha ottenuto anche il patrocinio dell'USR.

E' stata un'occasione speciale per conoscere le macchine di matematica, per cercare nuovi approcci all'insegnamento della matematica e per riflettere assieme se nell'epoca della multimedialità utilizzando delle macchine in legno, il linguaggio matematico possa essere più fruibile e spogliarsi di antichi pregiudizi, per cui è ormai credenza che la matematica sia una materia accessibile solo a pochi.

I grafici e le tabelle, le osservazioni ed i commenti che troverete nelle pagine successive vogliono essere un racconto breve con una piccola pretesa: quella di evidenziare l'interesse che nasce dalla condivisione di un percorso, a partire dall'analisi del reale bisogno per finire alla quotidiana gestione dell' aula.

La nostra speranza è che questo intervento formativo, che ci è apparso ben riuscito, possa continuare ancora, magari rinnovando ogni volta l'approccio didattico e modificandolo a seconda delle esigenze dei partecipanti. Il percorso formativo di cui stiamo parlando ora è la terza edizione e noi puntiamo e speriamo di realizzarne una quarta, in modo tale che questi incontri diventino un appuntamento annuale.

L'istituzione "Gian Franco Minguzzi" della Provincia di Bologna nel 2009 ha avuto l'incarico dalla Regione Emilia Romagna - Assessorato Regionale alla Scuola Formazione Professionale Università Lavoro e Pari Opportunità in intesa con la Direzione Generale dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna e l'Agenzia Nazionale per lo sviluppo dell'Autonomia Scolastica - di realizzare un laboratorio di macchine di matematiche la cui sede è presso l'I.I.S. " Crescenzi-Pacinotti" di Bologna in via Saragozza, 9.

Qui di seguito riportiamo una tabella esplicativa degli orari disponibili per prenotare l'utilizzo del laboratorio e/o prendere in prestito le macchine matematiche.

Il laboratorio macchine matematiche **SEDE: I.I.S. " Crescenzi-Pacinotti" Via Saragozza, 9 – 40123 Bologna**
E' possibile accedere a prestiti delle macchine e prenotare il laboratorio tramite appuntamento nei giorni di seguito elencati : Referenti dello sportello prestiti Annalina Marsili – e-mail :annalina.marsili@provincia.bologna.it Tel. 051.5288525- Valentina Prestigiacomo: e-mail: valentina.prestigiacomo@provincia.bologna.it - tel: 051.5288511
• **Martedì :** dalle ore **9.30** alle ore **12.30;** e dalle ore **14.00** alle ore **17.00**
• **Mercoledì:** dalle ore **9.30** alle ore **12.30**.
• **Giovedì :** dalle ore **9.30** alle ore **12.30** e dalle ore **14.00** alle ore **17.00**

Il laboratorio di macchine di matematiche:

Il laboratorio è fornito di una serie di macchine (in parte in legno, in parte in plastica riciclata, comunque tutte manipolabili, come ad esempio le macchine che generano le curve) che risultano essere più ricche ed interessanti delle opportunità consentite dall'uso di software. In dotazione del laboratorio ci sono anche materiali poveri (fogli bianchi, blocchi per appunti, riga, squadre e compasso da lavagna, nastro adesivo in carta, matite e mine di ricambio da poter utilizzare al momento con i pantografi stessi).

La formazione: programma e contenuti

La formazione

Dal 20 febbraio 2014 al 13 aprile 2014, presso i locali dell' I.I.S. " Crescenzi - Pacinotti", si è tenuto un percorso di formazione per gli insegnanti delle scuole secondarie di primo grado e secondo grado di Bologna e provincia, ogni incontro ha avuto una durata di 3 ore per un totale di 12 ore di formazione erogate. Si è trattato della terza edizione del corso di formazione sull'utilizzo delle macchine matematiche.

Calendario programma del corso

Data	Contenuti	Docenti
1^ Incontro 20 febbraio 2014 ore 14.30 17.30	**Presentazione del laboratorio delle macchine matematiche.** L'idea generale di laboratorio di matematica. Quadro tecnico di riferimento. Attività di esplorazione e analisi dei pantografi. Percorsi didattici. **Trasformazioni geometriche.** **Strumenti** Pantografi e biellismi	**Marco Turrini/ Carla Zanoli** Associazione macchine matematiche
2^ incontro 27 febbraio 2014 ore 14.30 17.30	**Attività di analisi dei pantografi.** Percorsi didattici	**Marco Turrini/Carla Zanoli** associazione macchine matematiche
3^ incontro 6 marzo 2014 Ore 14.30 17.30	**Il laboratorio di matematica**: Un esempio di continuità verticale. Analisi di un caso: costruzione con riga e compasso. **Strumenti:** Riga e compasso	**Manuela Concu** Scuola secondaria di primo grado " G. Pascoli" Anzola dell'Emilia **Massimo Salvi** Polo Scolastico Montessori – Da Vinci Porretta Terme Scuola Secondaria
4^ incontro 13 Marzo 2014 ore 14.30 – 17.30	**Attività di esplorazione e analisi dei curvigrafi**: Percorsi didattici	**Manuela Concu** Scuola secondaria di primo grado " G. Pascoli" Anzola dell'Emilia **Massimo Salvi** Polo Scolastico Montessori – Da Vinci Porretta Terme Scuola Secondaria
Sede Incontri Laboratorio macchine matematiche Presso l'I.I.S. "Crescenzi – Pacinotti" Via Saragozza, 9 40123 Bologna		

Nel corso si sono affrontate varie tematiche e in specifico si è parlato di idea generale del laboratorio di matematica, sono stati presentati gli strumenti del lavoro, riga compasso, pantografi, curvigrafi e biellismi. I partecipanti hanno potuto manipolare le macchine e rendersi conto delle novità didattiche offerte dalle macchine stesse. Hanno avuto la possibilità di confrontarsi su nuovi stimoli ad una modalità quantomeno insolita e controcorrente per avvicinarsi alla matematica, attraverso la proposta di attività che sottolineano il divertimento, la sorpresa e la scoperta. E' da sottolineare che per le sperimentazioni, i partecipanti hanno avuto il supporto tecnico/scientifico dei rappresentanti dell'associazione macchine matematiche e di due docenti che precedentemente avevano frequentato il corso del 2010 e che oggi a loro volta sono diventati formatori. Abbiamo realizzato la formazione ad un gruppo di insegnanti sperimentatori (si sono iscritti al corso in 23), per mettere in evidenza le relazioni tra gli strumenti "artefatti"e le strategie didattiche con cui l'insegnante può favorire la transizione dai primi testi prodotti dagli allievi a testi matematici. L'idea di ripetere il percorso formativo era proprio quello di far incontrare insegnanti già formati con dei nuovi colleghi curiosi di apprendere la manipolazione delle macchine e che negli anni scorsi non avevano avuto la possibilità di frequentare, quindi diffondere nuove modalità didattiche della matematica.

Del resto la realizzazione del laboratorio delle macchine matematiche in rete è nata con l'intento di facilitare l'avvicinamento degli studenti allo studio delle materie scientifiche. E solo attraverso il confronto continuo, la possibilità di fruire delle macchine e di poterle manipolare dà la garanzia di conoscerle e comprenderle. Quindi auspichiamo che anche il prossimo anno questa iniziativa già sperimentata, possa continuare attraverso incontri mirati, convegni e discussioni sulle potenzialità del laboratorio. Puntiamo su una diffusione capillare e soprattutto contiamo sul " *passa parola*" tra gli insegnanti che hanno avuto la possibilità di conoscere le macchine ed utilizzarle in classe facendole sperimentare ai loro ragazzi. L'obiettivo finale è la realizzazione di una formazione continua e permanente, che dia la possibilità a chi si imbatte per caso in una delle nostre macchine e voglia approfondire il suo funzionamento e la sua applicabilità lo possa fare.

L'Istituzione G.F. Minguzzi/ICentro Aneka in un 'ottica di benessere scolastico e di sviluppo di una rete di strutture espositive scientifiche come risorsa didattico-pedagogica per l'insegnamento delle materie scientifiche auspica la possibilità:

- di creare una rete locale dove il laboratorio delle macchine possa diventare patrimonio delle scuole, dei centri e degli altri servizi che sono a supporto delle scuole e possa diventare volano e punto di riferimento per quanti vogliano manipolare, e conoscere le macchine di matematica.
- di attivare la propria rete per diffondere e promuovere le sperimentazioni delle macchine di matematica, organizzando eventi, convegni, collaborazioni con l'istituto dei beni culturali, giornate a tema e percorsi di formazione sulle buone pratiche di possibili collaborazioni tra musei scientifici e il mondo della scuola.
-di mantenere attive le sperimentazioni laboratoriali, mettendo a disposizione degli insegnanti interessati il laboratorio delle macchine, mantenendo aperto lo sportello dei prestiti delle macchine.

-di dare l’opportunità di conoscere, utilizzare e manipolare le macchine studiate appositamente per far scaturire nuove congetture sulla matematica e fornire un nuovo punto di vista per riappropriarsi dell’insegnamento della matematica.

Tipologia e presenze dei partecipanti

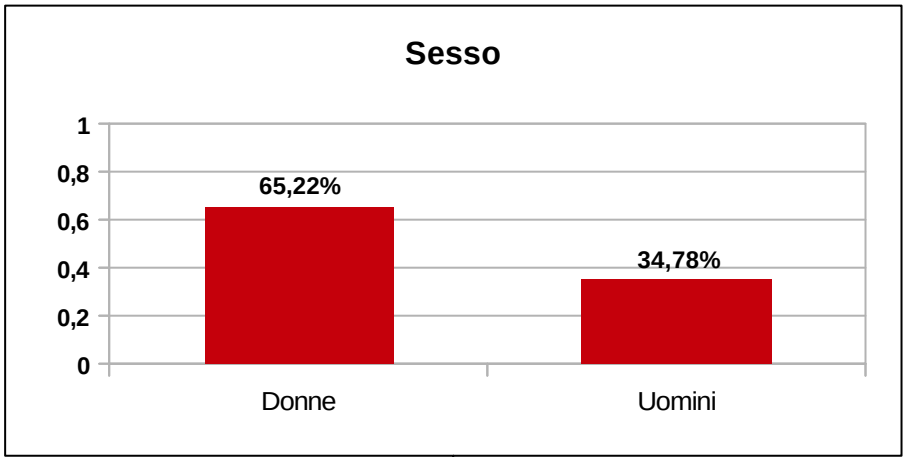
Gli iscritti al corso erano pari a 23: di questi 23 tre si sono ritirati, mentre a metà percorso si è aggiunto un insegnante. Tra i partecipanti 16 insegnano nelle scuole secondarie di primo grado , 1 insegnante di scuola primaria e 4 insegnanti delle scuole secondarie di secondo grado.

Ci è sembrato interessante andare a vedere la tipologia dei partecipanti in base al sesso, e capire anche la media delle presenze giornaliere

Per quanto riguarda il sesso come si può dedurre dalla tabella sottostante, il numero delle iscritte è più alto, infatti il 60,00% è rappresentato dalle donne.

Sesso

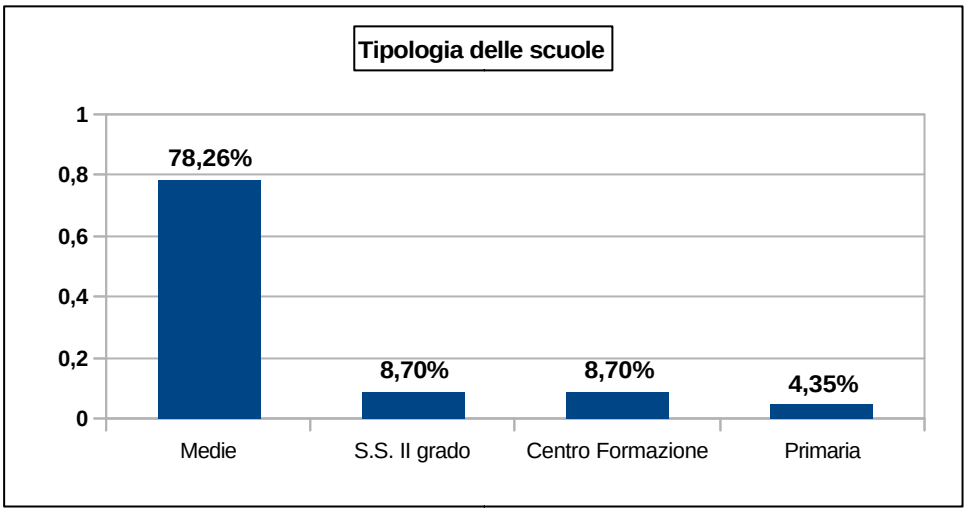
	Donne	Uomini	Totale Iscritti
Sesso	15	8	23
	Donne	Uomini	Totale
Sesso	65,22%	34,78%	100,00%



Tipologia delle scuole

Se poi andiamo ad osservare a quali tipi di scuole i partecipanti al corso appartengono, risulta che il 76,92% appartiene alle scuole secondarie di secondo grado, il 15,38 % alle scuole primarie e soltanto il 7,69% appartiene alle scuole secondarie di primo grado.

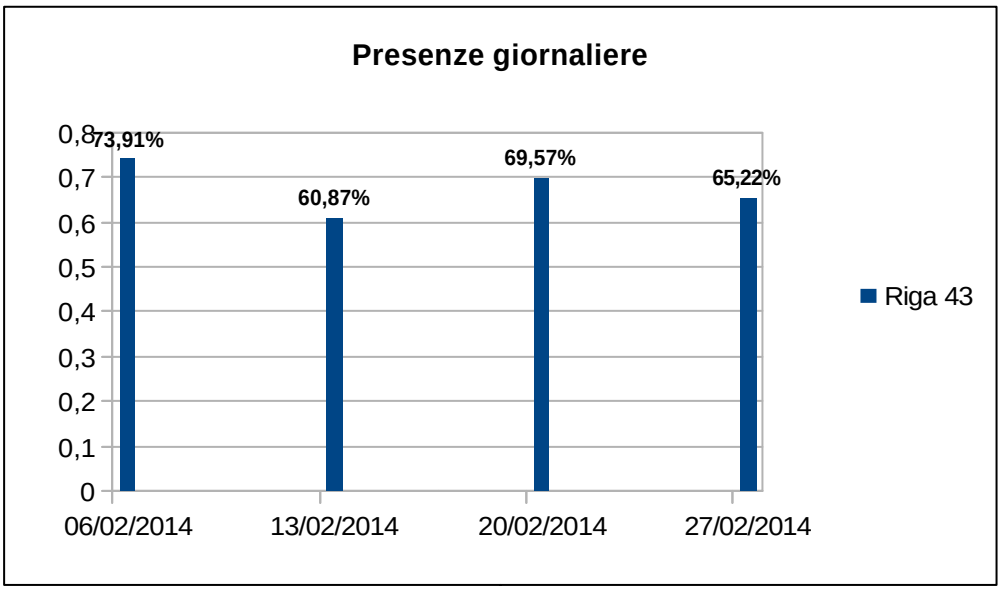
Tipologie scuole					
	Medie	S.S. II grado	Centro Formazione	Primaria	Totale
Tipologie scuole	18	2	2	1	23
	Medie	S.S. II grado	Centro Formazione	Primaria	Totale
Tipologie scuole	78,26%	8,70%	8,70%	4,35%	100,00%



LE PRESENZE GIORNALIERE_____

Le presenze giornaliere sono state mediamente tra il 15/16 di partecipanti, se consideriamo che su 23 iscritti 3 non sono mai venuti possiamo ritenerci soddisfatti.

Presenze giornaliere					
20/02/14	27/02/14	06/02/14	13/02/14	Totale Iscritti	Valore medio di presenze
16	15	17	14	23	15,5
20/02/14	27/02/14	06/02/14	13/02/14	Totale	Valore medio di presenze
69,57%	65,22%	73,91%	60,87%	100,00%	67,39%



La domanda iniziale, a cui il progetto regionale denominato " Scienza e tecnologia" voleva rispondere, era se si poteva attivare un percorso formativo/ informativo puntando in particolar modo su un nuovo approccio didattico relativo alla matematica, che basandosi sull'utilizzo concreto di strumenti o macchine matematiche potesse in qualche modo avvicinare maggiormente i ragazzi allo studio della materia stessa nel superamento di vecchi pregiudizi. Oltre ad un approccio didattico alternativo della matematica, si voleva andare a riflettere anche su un nuovo tipo di rapporto educativo allievo-insegnante, dove l'utilizzo di antiche/nuove strumentazioni potesse permettere allo studente l'apprendimento della materia in maniera più immediata, snella e concreta, per arrivare più facilmente a nuove congetture e ad uno studio teorico più attento.

Oggi, a fine corso, possiamo fare alcune riflessioni:

Anche nel terzo anno di formazione, come del resto si era verificato nella prima e nella seconda edizione, inizialmente l'aula sembrava voler puntare tutto sull'immediata comprensione di come si possono utilizzare le macchine messe a loro disposizione, si è creata subito un'atmosfera di profonda curiosità e necessità di conoscere le macchine e questo sentimento comune ha messo a proprio agio i partecipanti, che hanno posto domande ai docenti, prediligendo fin dall'inizio il confronto e il dibattito, interagendo continuamente con i docenti che di volta in volta hanno assecondato le loro implicite ed esplicite richieste. Fin dall'inizio si è creato un ottimo clima d'aula dove la complicità del fare lo stesso "Mestiere" ha fatto si che tutti si sentissero a proprio agio e la relazione è stata subito di tipo confidenziale e di interscambio di esperienze e curiosità. La scelta di affidare le prime due giornate formative ai rappresentanti dell'associazione macchine matematiche di Modena, è risultata vincente, perché i partecipanti hanno potuto comprendere come si è arrivati alla costruzione di queste macchine e soprattutto ad un didattica laboratoriale in classe.

L'inserimento dell'utilizzo delle macchine matematiche nell'ambito scolastico è emerso come un processo molto importante non solo per vivacizzare l'insegnamento della matematica nelle scuole, ma per creare nuovi tipi di relazioni tra le varie realtà territoriali a partire da nuovi stili e metodi di insegnamento della materia in questione.

L'importante per noi è essere riusciti a fornire uno spazio agli attori del mondo della scuola (in questo caso insegnanti di matematica, scienze, fisica e tecnologie) dove soffermarsi e riflettere con gli altri sui propri metodi di insegnamento. In questo percorso è stata presentata la matematica in modo non più statico, ma dinamico e innovativo.

Siamo convinti che a volte la riflessione e la sperimentazione di nuovi approcci didattici educativi possa essere un valido aiuto per affrontare meglio e con più convinzione la quotidianità di ciò che si sta facendo sia dal punto di vista professionale sia dal punto di vista di vissuto personale.

Ed è per questo motivo che abbiamo voluto realizzare questa terza edizione del corso, per dare l'opportunità di diffondere maggiormente la conoscenza delle macchine matematiche.

Per il futuro auspichiamo di poter organizzare ulteriori percorsi laboratoriali e/o giornate a tema di promozione aperta alla cittadinanza locale.

In definitiva, quindi, ci auguriamo che le nostre future iniziative possano riproporre, in larga misura, i contenuti affrontati e la metodologia didattica utilizzata, ma soprattutto conservare il senso che ha dato il via al progetto iniziale: la nostra (che sappiamo non essere solo nostra) personale convinzione, che l'utilizzo di nuovi strumenti quali le macchine matematiche possa essere un forte stimolo ad affrontare l'insegnamento e l'acquisizione in modo più accessibile a tutti.

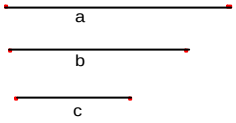
Costruzione 1

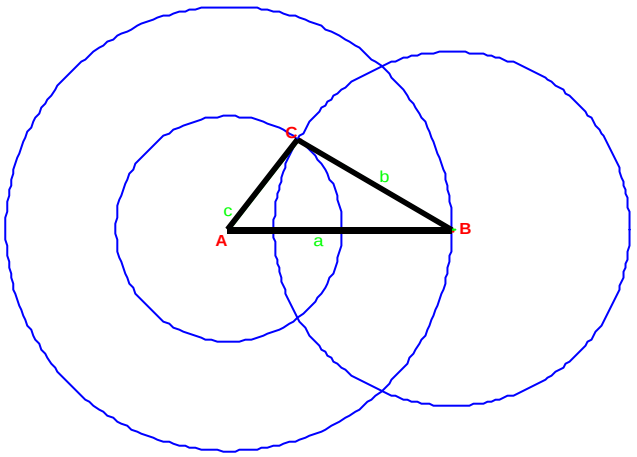
Costruzione con riga e compasso
Strumenti riga e compasso

Consegna: costruire un triangolo, dati tre lati.

Osservazioni per l'insegnante

- Una possibile costruzione
  Dati tre segmenti *a, b, c* (*). Si prenda un segmento AB congruente ad *a*. Si descrivano due circonferenze rispettivamente di centro A e raggio *c* e di centro B e raggio *b*: queste due circonferenze si intersecheranno in due punti; chiamato C uno di essi, il triangolo ABC soddisfa le condizioni richieste (perché i suoi lati sono congruenti ai segmenti *a,b,c* dati).





(*) Dati tre segmenti *a,b,c*, affinché il triangolo richiesto esista, è necessario che ciascuno dei segmenti sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (Disuguaglianza triangolare).

Sapere Matematico

Disuguaglianza triangolare (Prop. 20 LIBRO I degli Elementi di Euclide):
In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza.

Costruzione 2 a cura di Manuela Concu

Consegna: Costruire un triangolo isoscele
Strumenti . Riga e compasso

Spunti per la discussione

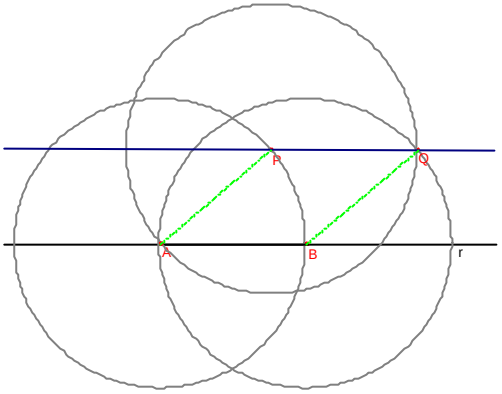
- Da dove siete partiti? Dalla definizione, da quali proprietà del triangolo? PERCHE'?
- Quale procedura avete seguito? PERCHE'?
- Che ruolo hanno avuto gli strumenti in queste scelte? E le vostre conoscenze?
- Avete prodotto delle costruzioni diverse?
- Se sì, quali? In cosa sono differenti? Quali proprietà del triangolo isoscele sono state utilizzate

Costruzione 3 a cura di Manuela Concu

Consegna. Data una Retta r, costruire una parallela ad essa passante per il punto P. *Cercate di produrre il maggior numero di costruzioni possibili*

Osservazioni per l'insegnante

- **Una possibile costruzione:**
  Sia r la retta data e P un punto fuori da essa. Si prenda su r un punto arbitrario A e poi un secondo punto B tale che sia AB congruente a AP; successivamente si descrivano le circonferenze di centri P e B e raggio AP. Queste si intersecheranno in A e in un secondo punto Q: la retta PQ è la parallela a r passante per P.



Giustificazione:

Il quadrilatero ABPQ è un rombo (la costruzione infatti porta all'individuazione di quattro segmenti congruenti consecutivi) e quindi i suoi lati opposti sono paralleli.

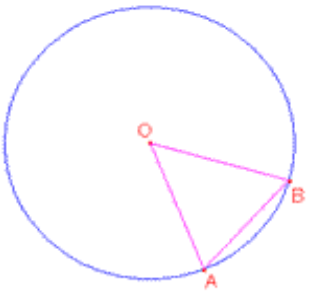
QUESTA È UNA POSSIBILE COSTRUZIONE:

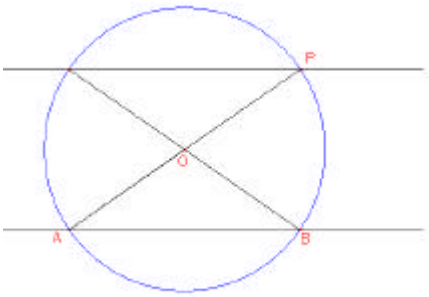
- AVETE OTTENUTO UN PRODOTTO ANALOGO? DIFFERENTE? IN COSA?
- NELLE VOSTRE COSTRUZIONI DA DOVE SIETE PARTITI? DALLA DEFINIZIONE, DA QUALI PROPRIETÀ DELLE RETTE PARALLELE? PERCHE'?
- QUALI PROPRIETÀ GEOMETRICHE AVETE SFRUTTATO PER LA COSTRUZIONE?

Esercizio 4 a cura di Manuela Concu

Comprendere e adattare ad un compito nuovo una costruzione di cui si conoscono solo il punto di partenza e il prodotto finale.

Consegna: Di seguito sono riportate due costruzioni geometriche (svolte con riga e compasso) che rappresentano il primo passo (Fig.1) e l'ultimo passo (Fig.2) di un elaborato di uno studente al quale era stato richiesto di costruire due rette parallele.





- Qual è il legame tra la prima e la seconda figura?
- Perché le due rette costruite nella Fig.2 sono parallele?
- Provare ad applicare la costruzione precedente per risolvere il seguente problema: "Data una retta *r* ed un punto P esterno ad essa, costruire la retta parallela ad *r* passante per P". Spiegare i passaggi effettuati.

.**P**

Pantografo C

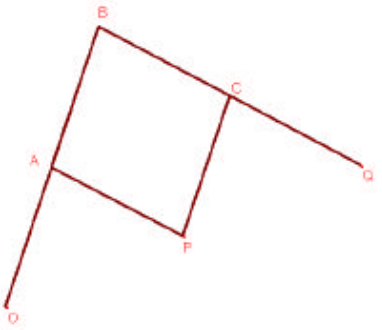
Come è fatta la macchina?

1. Descrivere la macchina (Quale figura geometrica formano le aste del sistema articolato? Quali possono essere i suoi movimenti? Come si comportano i diversi vertici di tale figura geometrica?). Giustificare le risposte.

2. Individuare e rappresentare graficamente le *configurazioni limite* del sistema articolato.

Che cosa fa la macchina?

3. Chiamiamo P e Q due vertici del sistema articolato, come indicato nella figura. Nella macchina, in ciascuno dei due vertici è presente un foro, in cui si può inserire una mina. Chiamiamo *tracciatori* questi due punti.
   Quali parti del piano sono raggiungibili dai tracciatori (cioè quali sono le *regioni piane* messe in corrispondenza dalla macchina)? Descrivete tali regioni, anche con disegni.



4. Se uno dei due vertici tracciatori (P o Q) descrive una figura (segmenti, triangoli, circonferenze, …), quale figura corrispondente viene tracciata dall'altro vertice? Questa corrispondenza tra figure è riconducibile a qualche *trasformazione geometrica* del piano a voi nota? Se sì, quale trasformazione? Precisate cosa vi ha consentito di riconoscerla.

5. Individuare gli *invarianti della trasformazione* (per esempio: elementi uniti, allineamento di punti, lunghezza di segmenti, verso di percorrenza delle figure, il rapporto tra segmenti, …) considerando le figure corrispondenti tracciate precedentemente e i movimenti della macchina.

Perché lo fa?

6. Quali caratteristiche della macchina permettono la realizzazione di tale trasformazione geometrica del piano? Giustificare la risposta.

Variazioni... della macchina

7. **Costruzione di una nuova macchina** Costruire una nuova macchina che realizza la stessa trasformazione individuata nell'esplorazione precedente ma di rapporto diverso. Chiedere il materiale ai docenti.

8. **E se si cambiasse il punto fisso (*vincolo*)?** Nella macchina che realizza la trasformazione di rapporto due (o un mezzo), cosa succederebbe se il punto fissato al piano fosse P e i tracciatori fossero O e Q? Quale particolare trasformazione geometrica si otterrebbe? Perché?

   Quest'ultima trasformazione si può ottenere fissando invece il punto medio di AP? Chi sarebbero in questo caso i tracciatori? Giustificare le risposte.

Materiale didattico a cura di Massimo Salvi

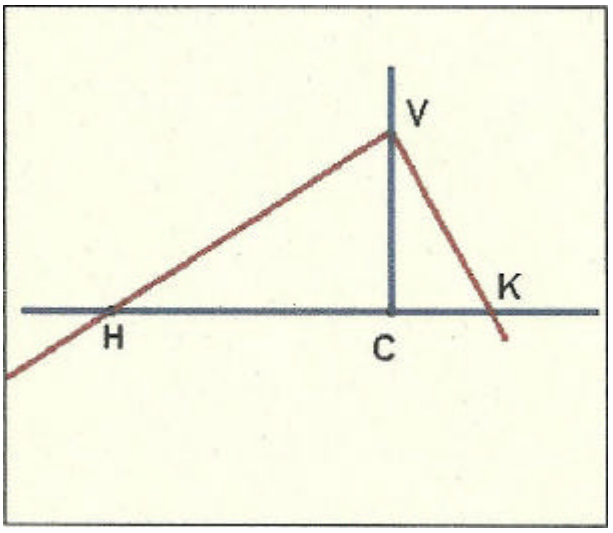
Siti sulle macchine
Sito dell'Associazione delle Macchine Matematiche
www.macchinematematiche.org
www.mmlab.unimore.it
documenti sul progetto MMLab
http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna.html
Coniche secondo Menecmo ed Apollonio:
http://www.macchinematematiche.org/images/visite_laboratorio/presentazione_coniche.pdf
Teorema di Dandelin http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=92&Itemid=173

Qualche riferimento bibliografico

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. , 2009, Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B, pp. 270-294.
Bartolini Bussi M. G., Maschietto M**.,** 2006, *Macchine matematiche : dalla storia alla scuola*- Springer .

Scheda 1.1

Strumento di Cavalieri

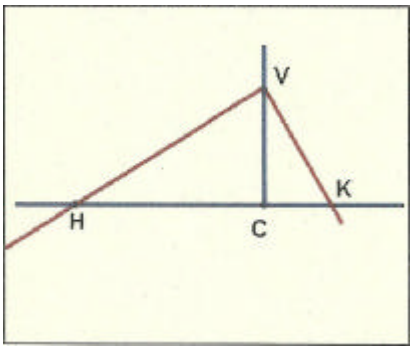


a) Inserisci la mina (o tieni la matita) in **V** e traccia la curva muovendo la macchina: riconosci di che porzione di curva si tratta? Dimostrate la vostra ipotesi.

b) Indica con **x** il segmento **HC**, con **y** il segmento **VC** e con **p** il segmento **CK**. Scrivi la relazione tra **x**, **y** e **p** considerando il triangolo rettangolo **HVK**. Conosci la curva di cui hai scritto l'equazione?

A cura di Massimo Salvi

Scheda 1-T Parabolografo di Cavalieri



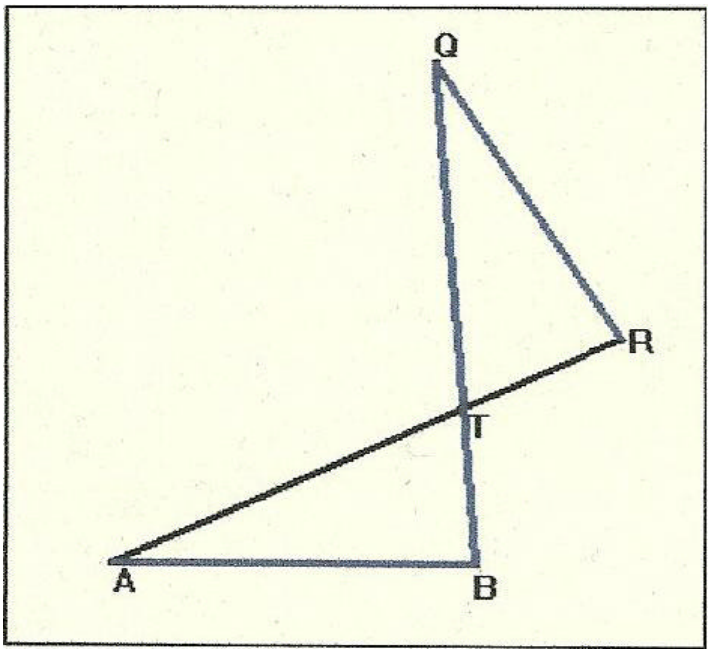
Lungo la scanalatura rettilinea HK praticata in un piano, scorre un segmento CK (che è in legno o metallo) di lunghezza fissata. Al suo estremo C è vincolata rigidamente, in direzione perpendicolare a CK, un'asta CV che giace sullo stesso piano.

Quando l'angolo retto KCV si muove, trascina con se l'altro angolo retto KVH, che ha i lati VH e VK vincolati a passare per i punti H e K. Durante il movimento AVK resta un triangolo rettangolo (variabile) di cui VC è l'altezza relativa all'ipotenusa HK. Possiamo applicare il teorema di Euclide ricavando: $CV \times CV = CK \times CH$. Ponendo $CH=x$, $VC=y$, $CK=k$ si può scrivere: $x=(1/k)y \times y$ che è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x.

A cura di Massimo Salvi

Scheda 2.1

Antiparallelogramma articolato

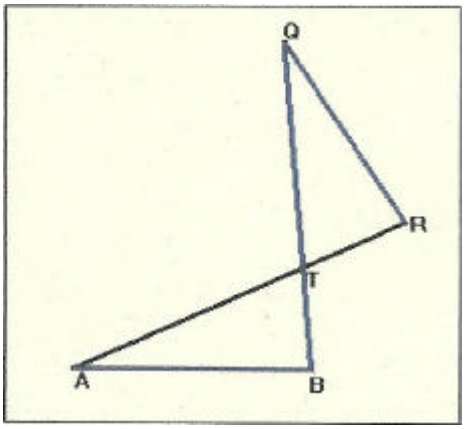


α) Osserva e muovi lo strumento, quale è la proprietà della curva descritta dal punto **T**? Conosci questa curva?

β) Dimostrate le vostre ipotesi.

A cura di Massimo Salvi

Scheda 2-T Antiparallelogramma articolato



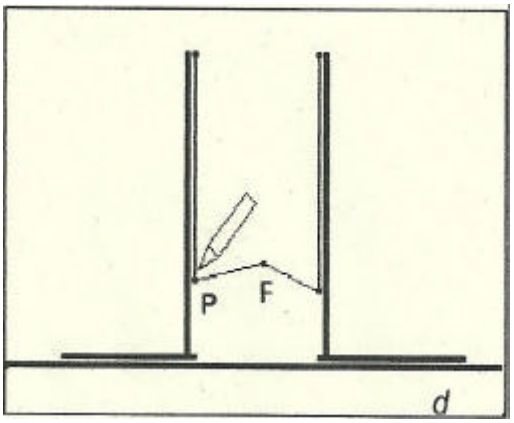
Si chiama antiparallelogramma articolato un quadrilatero (piano) articolato ABQR nel quale due lati opposti (AB, QR) sono i lati non paralleli di un trapezio isoscele ABRQ (AB congruente a QR), mentre gli altri due lati (AR, BQ) sono le diagonali del trapezio (AR congruente a BQ). Se fissiamo A e B sul piano (perni fissi) e muoviamo l'asta AR, si vede che i punti Q ed R percorrono due circonferenze di centro A e B, mentre i lati AR e BQ si incontrano in T.

Si trova che TA + TB = costante e quindi la curva tracciata da T è una ellisse. Infatti è sufficiente considerare i due triangoli ABR e QRB: essi hanno tutti i lati congruenti, pertanto si ha che gli angoli in A e in Q sono congruenti così come gli angoli in R e B, da questo segue che i triangoli ABT e QRT sono congruenti. In particolare TB è congruente a TR, e questo significa che TA + TB= TA+ TR=AR=costante.

A cura di Massimo Salvi

Scheda 3.1

Strumento a filo



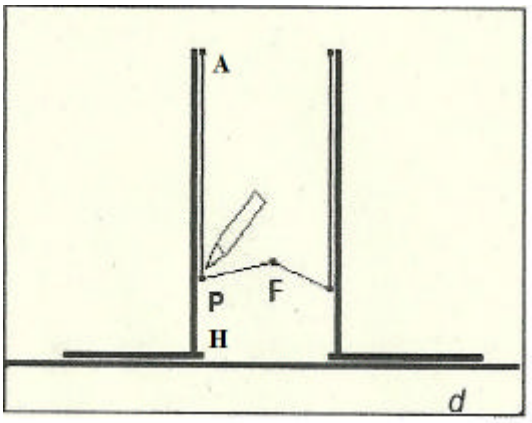
a) Posiziona il filo in modo che tenendolo teso lungo l'asta il suo capo libero coincida con la base dell'asta verticale della squadra, poi fissa tale capo nel punto F. Mantenendo il filo teso e accostato a uno dei lati della squadra con la punta di un tracciatore, fai scorrere il secondo lato della squadra sulla guida rettilinea vincolata al piano del modello, ***d***. (Nel caso lo strumento possieda due squadre, ripeti il procedimento anche con l'altra squadra). Che curva è quella tracciata dal punto P?

b) Dimostra le tue ipotesi.

c) Cosa succede se si cambia la lunghezza del filo?

A cura di Massimo Salvi

Scheda 3-T Parabolografo a filo



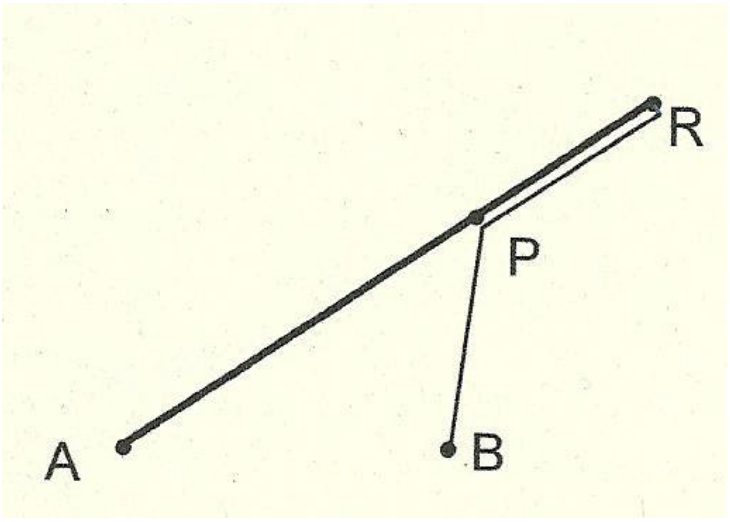
Una squadra costituita da due aste fra loro perpendicolari ha un lato scorrevole su una guida rettilinea d; F è un perno fissato sul piano e P è un punto (variabile) sull'asta verticale. Un filo di lunghezza L uguale alla lunghezza dell'asta verticale AH, è vincolato nei suoi estremi ai punti A ed F. Se si fa scorrere la squadra lungo d e contemporaneamente con la punta di una matita in P si mantiene il filo teso e accostato all'asta, si disegna un arco di parabola avente fuoco in F e direttrice coincidente con d.

Si ha infatti **PF=L-AP=AH-AP=PH.**

A cura di Massimo Salvi

Scheda 4.1

Strumento a filo

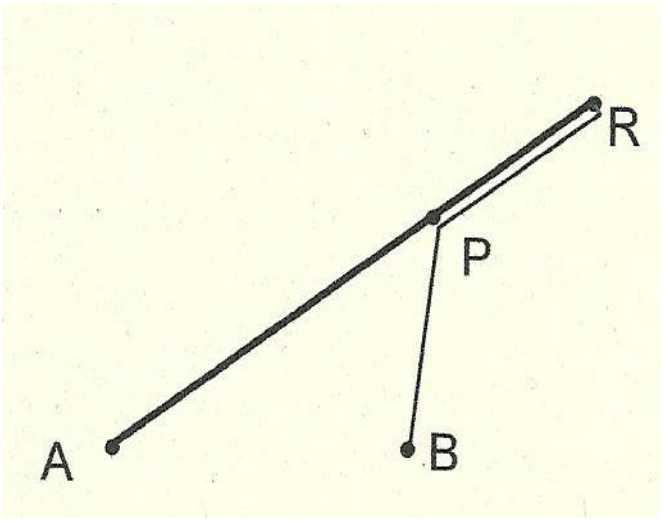


d) Lo strumento presenta una riga e un filo. Un capo del filo è legato all'estremità della riga che ha l'altra estremità incernierata al piano nel punto A (perno attorno al quale può ruotare); il secondo capo del filo è fissato a un punto B del piano. Accosta con una matita il filo al bordo della riga. Mantieni teso il filo. Con la punta della matita, fai ruotare la riga tenendo il filo sempre teso e accostato al bordo della riga stessa. Quale curva viene tracciata dal punto P?

e) Dimostrate le vostre ipotesi.

A cura di Massimo Salvi

Scheda 4-T Iperbolografo a filo

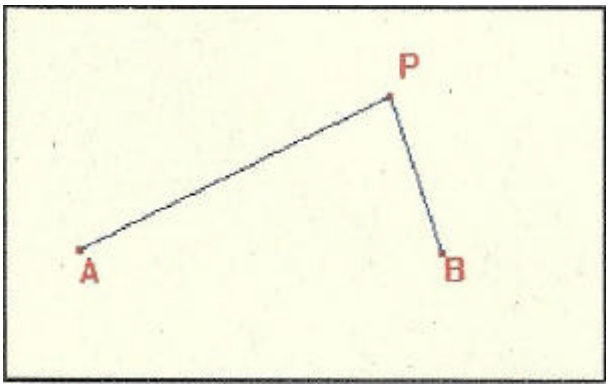


Un’asta AR di lunghezza L, imperniata in A. Un filo di lunghezza a<L ha gli estremi fissati in R e in B.
Tenendo con la punta di una matita in P il filo teso con il tratto PR accostato all’asta AR e facendo ruotare l’asta attorno al suo perno, il punto P descrive un arco di iperbole con i fuochi A e B. Infatti PA-PB=PA+PR-(PB+PR)=AR-a=L-a=costante.

A cura di Massimo Salvi

Scheda 5.1

Strumento a filo

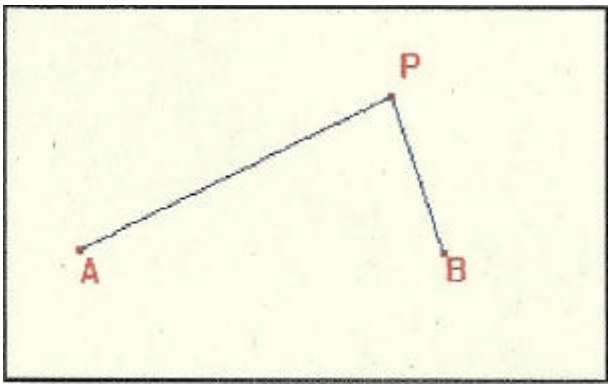


1. Tieni il filo teso fissato con i capi in A e B. Ponendo la matita in P e tenendo il filo sempre in tensione, traccia la curva. Quale curva viene tracciata da P?

2. Dimostrate le vostre ipotesi.

A cura di Massimo Salvi

Scheda 5.2 Ellissografo a filo



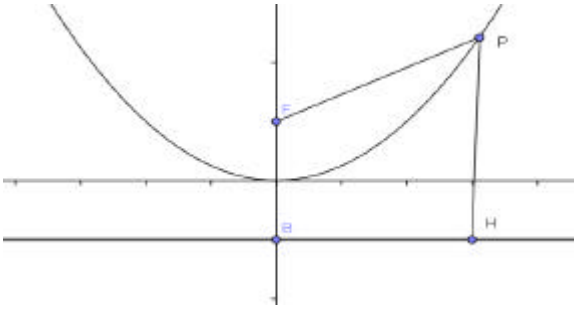
Un filo di lunghezza *L* > AB è vincolato nei suoi estremi ai perni A e B. Mantenendo il filo teso mediante la punta P di una matita si disegna l'ellisse di fuochi A e B, infatti in ogni posizione si ha : PA+PB=*L* (cost.).

A cura di Massimo Salvi

Scheda 6

Parabola

Se consideriamo la parabola di fuoco F (sull'asse y) e direttrice d (passante per i punti B e H), entrambi alla stessa distanza da O, la condizione PF=PH conduce all'equazione del tipo::



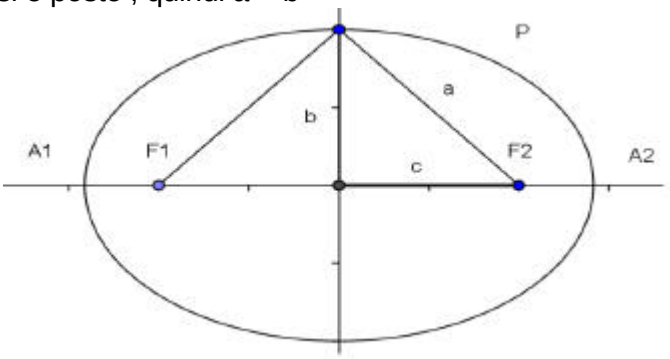
Vertice ; Fuoco ; Direttrice .

Scheda 3.1

a) Data l'equazione della parabola , (definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano) come vanno fissati i parametri della macchina (posizione del fuoco e lunghezza del filo) per tracciare tale parabola?

Ellisse

Se consideriamo una ellisse con fuochi sull'asse x di coordinate , distanza focale 2c, somma ; a > c.
L'equazione è dove si è posto , quindi a > b



Vertici (sull'asse x), (sull'asse y) , . Asse maggiore di lunghezza 2a, asse minore di lunghezza 2b. Fuochi , .

Scheda 2.1

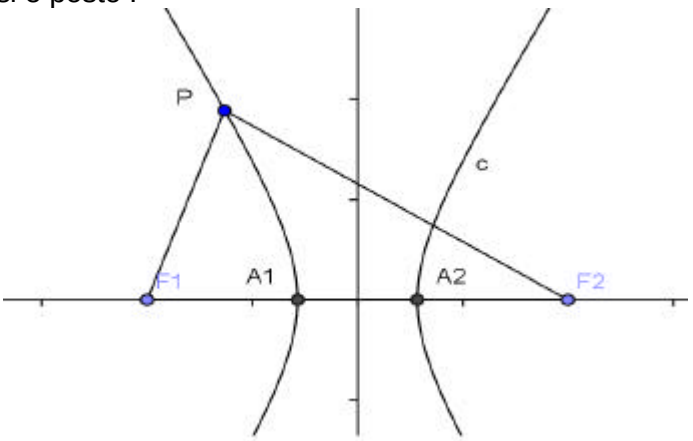
a) Definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano, quale è l'equazione dell'ellisse tracciata dalla macchina?

Scheda 5.1

a) Data l'equazione dell'ellisse , (definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano) come vanno fissati i parametri della macchina (distanza fra i fuochi e lunghezza del filo) per tracciare tale ellisse?

Iperbole

Se consideriamo una iperbole con fuochi sull'asse x di coordinate , distanza focale 2c, differenza fra le distanze di un punto P dai due fuochi ; a < c.
L'equazione è dove si è posto .



Vertici reali (sull'asse x), , asse trasversodi lunghezza 2a, Fuochi , . Asintoti di equazione .

Scheda 4.1

α) Data l'equazione dell'iperbole , (definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano) come vanno fissati i parametri della macchina (distanza fra i fuochi e lunghezza del filo) per tracciare tale iperbole?

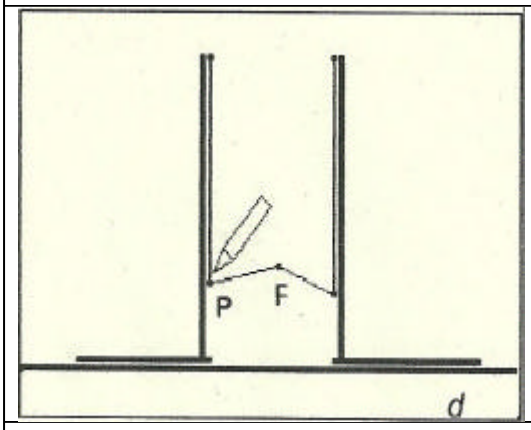
β) Come è possibile tracciare anche l'altro ramo dell'iperbole?

Scheda 6-T

Parabola

Scheda 3.1

3. Data l'equazione della parabola , con a >0, (definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano) come vanno fissati i parametri della macchina (posizione del fuoco e lunghezza del filo) per tracciare tale parabola?

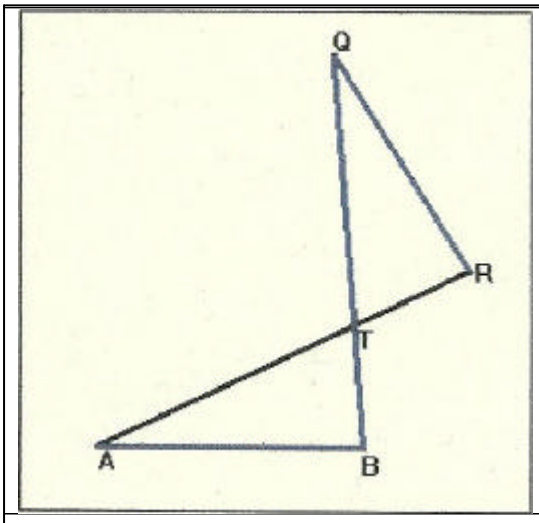


Immaginiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano con asse x coincidente con d, e con l'asse y contenente il fuoco F. Definita una unità di misura per le lunghezze, il fuoco dovrà essere posto ad una altezza (ordinata) , inoltre la lunghezza L del filo (considerata a partire dall'estremo superiore dell'asta) dovrà essere tale da formare il vertice della parabola nell'origine, dove si avrà, detta K la lunghezza dell'asta: .

Ellisse

Scheda 2.1

b) Definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano, quale è l'equazione dell'ellisse tracciata dalla macchina?

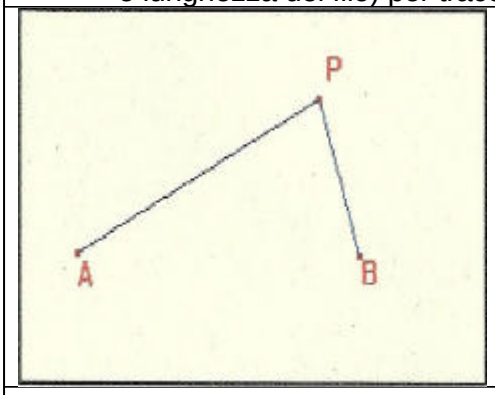


Supponiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto medio di AB e con asse x su AB. Si ha AT+BT=AR=2a, inoltre AB=distanza focale=2c. Quindi, definita l'unità di misura, sono definiti i valori di tali lunghezze e l'equazione è:

dove e

Scheda 5.1

χ) Data l'equazione dell'ellisse , (definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano) come vanno fissati i parametri della macchina (distanza fra i fuochi e lunghezza del filo) per tracciare tale ellisse?



Anche in questo caso supponiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto medio di AB e con asse x su AB. Si ha AP+BP=L=2a, inoltre AB=distanza focale=2c. Quindi, definita l'unità di misura, si potranno fissare le seguenti lunghezze:
lunghezza del filo:

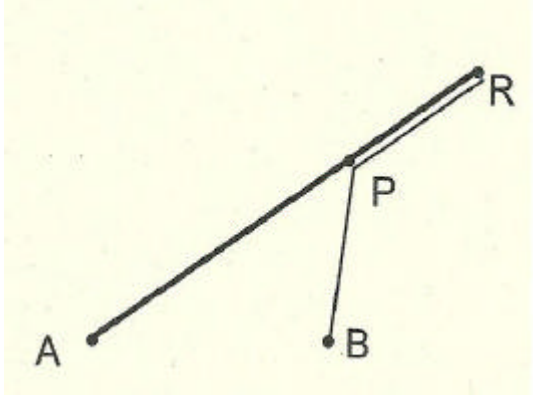
distanza fra i fuochi:

Iperbole

Scheda 4.1

a) Data l'equazione dell'iperbole , (definita una unità di misura e fissato un sistema di riferimento cartesiano) come vanno fissati i parametri della macchina (distanza fra i fuochi e lunghezza del filo) per tracciare tale iperbole?

b) Come è possibile tracciare anche l'altro ramo dell'iperbole?



a) Supponiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto medio di AB e con asse x su AB. Definita l'unità di misura, la lunghezza di AB è la distanza focale 2c (immaginiamo di poter spostare il punto B). La lunghezza dell'asta AR è fissata, possiamo modificare solo la lunghezza del filo fissato in R e B, e deve essere AP-PB= 2a, ovvero AR-L=2a, quindi potremo fissare la lunghezza L del filo (dal capo B al capo R): L= AR-2a e la distanza focale : .

b) Invertendo le posizioni di AR e B, oppure fissando la lunghezza del filo L'= AR+2a

Pantografo A

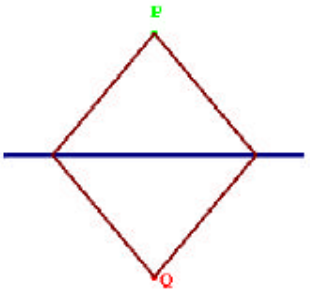
Come è fatta la macchina?

1. Descrivere la macchina (Quale figura geometrica formano le aste del sistema articolato? Quali possono essere i suoi movimenti? Come si comportano i diversi vertici di tale figura geometrica?). Giustificare le risposte.

2. Individuare e rappresentare graficamente le *configurazioni limite* del sistema articolato.

Che cosa fa la macchina?

3. Chiamiamo *P* e *Q* due vertici del sistema articolato, come indicato nella figura qui di fianco. Nella macchina, in ciascuno dei due vertici è presente un foro, in cui si può inserire una mina. Chiamiamo 'tracciatori' questi due punti.
   Quali parti del piano sono raggiungibili dai tracciatori (cioè quali sono le *regioni piane* messe in corrispondenza dalla macchina)? Descrivere tali regioni, anche con disegni.



4. Se uno dei due vertici tracciatori (P o Q) descrive una figura (segmenti, triangoli, circonferenze, …), quale figura corrispondente viene tracciata dall'altro vertice? Questa corrispondenza tra figure è riconducibile a qualche *trasformazione geometrica* del piano a voi nota? Se sì, quale trasformazione? Precisate cosa vi ha consentito di riconoscerla.

5. Individuare gli *invarianti della trasformazione* (per esempio: elementi uniti, verso di percorrenza delle figure, ...) considerando le figure corrispondenti tracciate precedentemente e i movimenti della macchina.

Perché lo fa?

6. Quali caratteristiche della macchina permettono la realizzazione di tale trasformazione geometrica del piano? Giustificare la risposta.

Variazioni... della macchina

7. **E se si cambiasse il quadrilatero?** Vi è qualche altro quadrilatero che, sostituito al sistema articolato della macchina, permette di ottenere un'altra macchina matematica che realizza la stessa trasformazione geometrica? Se sì, quale quadrilatero e perché?
   Quali quadrilateri non permettono, invece, di avere una macchina che realizza la stessa trasformazione geometrica?

8. **E se si cambiassero i punti che scorrono nella guida?** Cosa succederebbe se si scegliessero due punti equidistanti da P (o da Q) sulle aste congiunte in P (o in Q) al posto dei due vertici del quadrilatero articolato (diversi da P e Q) che scorrono nella guida? Fare uno schizzo della nuova macchina matematica che risulterebbe da un tale cambiamento.
   Quali potrebbero essere le caratteristiche della trasformazione geometrica che si otterrebbe? Giustificare la risposta.

Allegato **B**: Analisi dati

I risultati dei questionari di fine corso

I questionari che ci sono stati restituiti a fine corso, sono stati 16 e se consideriamo che gli iscritti al percorso originariamente erano 23, le schede raccolte rappresentano comunque le necessità, i dubbi e le perplessità della maggioranza dei partecipanti.
Coloro che hanno compilato il questionario di gradimento hanno ritenuto opportuno farci conoscere la loro opinione sui contenuti del corso e in alcuni casi anche qualche suggerimento nel caso la nostra esperienza dovesse ripetersi. Per cui ci è sembrato giusto analizzare la valutazione da loro espressa .

Nel questionario di fine corso abbiamo posto una serie di domande su varie aree tematiche.

1 – I contenuti
2 – La docenza
3 – Il clima d'aula
4 – L' organizzazione del corso
5 – L'immagine complessiva
6 – Informazioni generali

Qui di seguito mostreremo i grafici e le tabelle più significative:

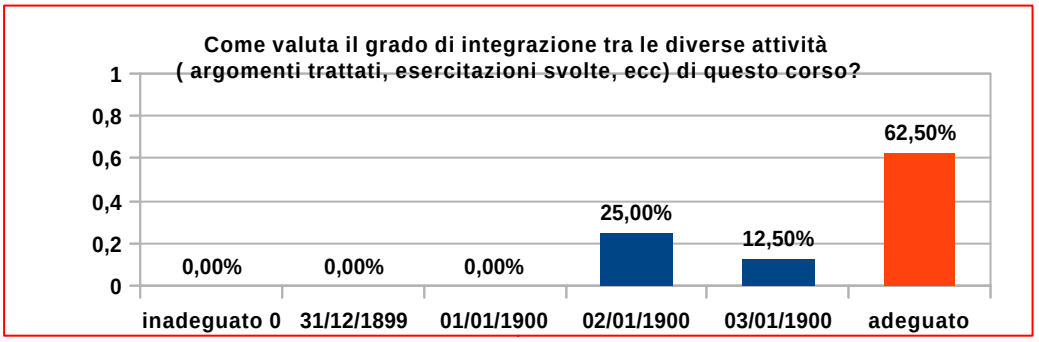
I contenuti

Rispetto ai contenuti, nel complesso lei si ritiene:						
Poco soddisfatto	1	2	3	4	Molto soddisfatto 5	Totale
0	0	0	2	6	8	16
Poco soddisfatto	1	2	3	4	Molto soddisfatto 5	Totale
0,00%	0,00%	0,00%	12,50%	37,50%	50,00%	100,00%

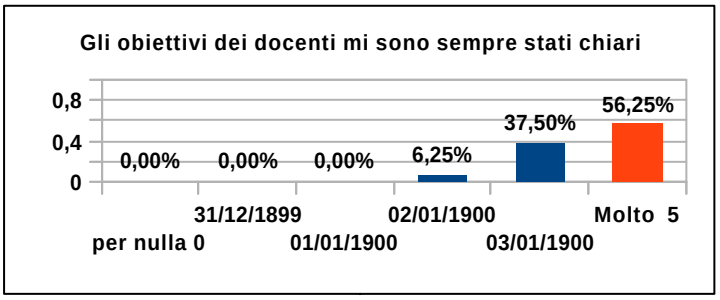
Come si evince dalla tabella sopraindicata, l'87,50% dei rispondenti si ritiene molto soddisfatto dei contenuti appresi durante il corso.

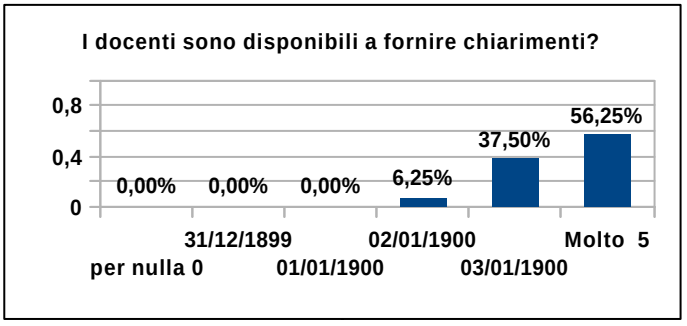
Rispetto ai contenuti, nel complesso, lei avrebbe voluto:	
Più teoria	0,00%
Più strumenti da poter utilizzare nel lavoro quotidiano	14,29%
Più materiale didattico	14,29%
Più lavoro di gruppo	0,00%
Più confronto tra esperienze	19,04%
Più sperimentazioni con le macchine sui problemi che mi trovo ad affrontare in classe	38,10%
Altro (specificare)	0,00%
N.R.	14,28%
Totale	100,00%

Nella tabella numero 2 un buon 38, 10% avrebbe voluto più sperimentazione in aula sui problemi da affrontare in classe con i ragazzi, e un altro 19, 04% avrebbe voluto più confronto fra esperienze.
Inoltre il 62,50% ritiene adeguata l'integrazione fra le diverse attività svolte in aula.



La docenza
Per quanto riguarda invece la docenza, possiamo dire che la valutazione fatta dai partecipanti è più che positiva, infatti tutti ritengono che gli obiettivi dei docenti sono sempre stati chiari, il 93, 75% afferma che tutti i docenti hanno stimolato la loro curiosità e che sono stati disponibili sempre a fornire chiarimenti (100%).Tutti i corsisti hanno affermato che tra i vari docenti c'è stato un buon raccordo.



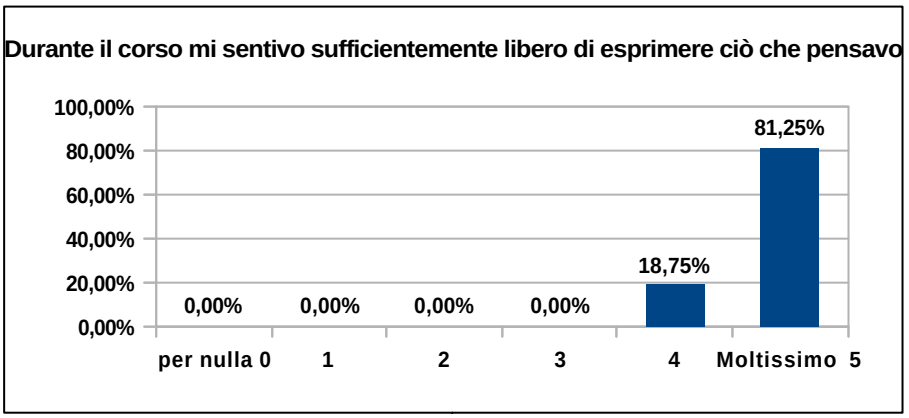


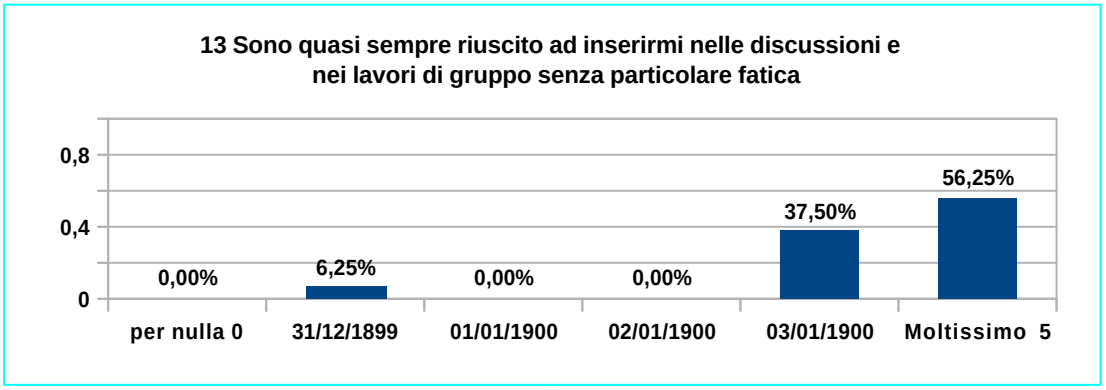
La domanda numero 10 chiedeva ai partecipanti cosa avrebbero voluto maggiormente rispetto alla docenza: la maggioranza non ha risposto, ma un buon 16,67% dei rispondenti ha affermato che avrebbe voluto maggio materiale informativo e un raccordo maggiore tra teoria e pratica

10 rispetto alla docenza lei avrebbe voluto: (max 2 risposte)	
N.R	38,89%
altro	5,56%
maggior materiale informativo sugli argomenti trattati	16,67%
maggior stimolo alla riflessione personale e/o di gruppo	5,56%
maggior disponibilità all'ascolto dei diversi pareri	5,56%
maggior approfondimento dei problemi affrontati	11,11%
maggiore raccordo tra teoria ed esercitazioni	16,67%
maggiore chiarezza espositiva	0,00%

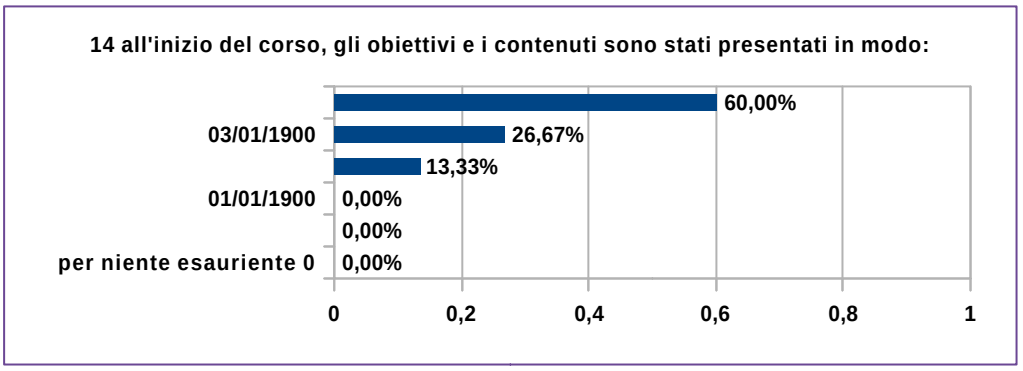
Il clima d'Aula

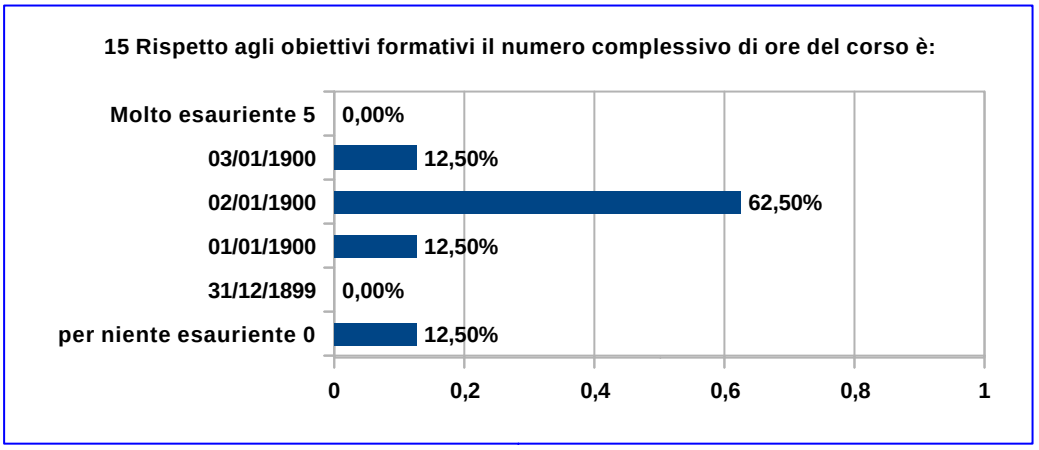
Il clima d'aula è stato ottimo, tutti hanno dichiarato di sentirsi sufficientemente liberi di esprimere il proprio pensiero, soltanto il 12,50% dei rispondenti ha dichiarato di essersi annoiato, mentre il 93,75% è riuscito ad inserirsi nelle discussioni senza fatica.





L'organizzazione del corso





16 Rispetto all'organizzazione complessiva del corso lei avrebbe voluto:	
Non risponde	33,33%
altro	5,56%
minore difficoltà nell'ottenere informazioni	0,00%
Durata complessiva della singola giornata minore	11,11%
Durata complessiva della singola giornata maggiore	5,56%
Durata complessiva del corso maggiore	38,89%
Durata complessiva del corso minore	5,56%
Totale	100,01%

Dalle tabelle e dai grafici sopra riportati si può notare che anche per quanto riguarda l'organizzazione del corso, le critiche che sono state fatte sono sicuramente positive: l'86,67% dichiara che gli obiettivi e I contenuti del corso, sono stati presentati in modo esuriente, il 62,50% dei ripsondenti dichiara buono il numero complessivo delle ore, mentre il 38, 89% afferma che la durata complessiva del corso doveva essere maggiore.

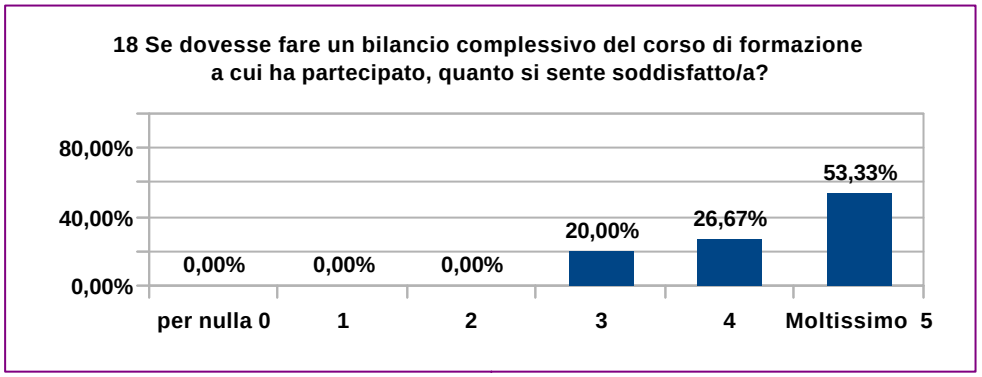
Immagine complessiva

Concludiamo questa breve carralleta delle risposte date dai nostri corsisti sull'immagine complessiva che hanno avuto dell'intero corso.

	per nulla 0	1	2	3	4	Moltissimo 5	Totale
17 Le aspettative che aveva all'inizio del corso quanto pensa si siano realizzate?	0,00%	0,00%	6,25%	12,50%	43,75%	37,50%	100,00%

L'81,25% di quanti hanno risposto, rispetto alle aspettative iniziali sono sati molto soddisfatti. E alla domanda successive quasi simile, hanno dichiarato di essere soddisfatti (53,33% dice moltissimo e il 26,67% dice molto soddisfatto.

Informazioni generali



Per concludere riportiamo qui di seguito le risposte date rispetto all'informazione generale.

19 Alla luce dei contenuti acquisiti in questo corso, Lei ritiene che: (max 2 risposte)	
Sarebbe stato più utile avere una preparazione di base precedente	0,00%%
Può costituire una base per approfondimenti futuri	35,48%
Non ha aggiunto nulla a ciò che sapevo già	0,00%
Avrei preferito avere risposte concrete ai problemi che incontro sul lavoro	3,23%
Avrei preferito avere più tempo per manipolare le m. m. dietro la guida del docente	3,23%
L' utilizzo delle M.M. Può essere un nuovo stimolo per lavorare in classe con i ragazzi	41,94%
E' comunque positivo avere un laboratorio di M.M., per fare attività con i ragazzi	16,13%
Altro	0.00%
Non risponde	0,00%

Il 41,94% dei rispondenti afferma che l'utilizzo delle M.M può essere un nuovo stimoloper lavorare in classe con I ragazzi, il 36, 48% dichiara che tutto ciò che ha appreso può costituire una base per approfondimenti futuri e infine il 16, 13% ritiene comunque positivo che ci sia un laboratorio delle M.M. L'87,50% si ritiene soddisfatto della metodologia utilizzata nei laboratori del corso.

Alla domanda può indicare altre eventuali esigenze di formazione hanno risposto così:

- *Geometria piana e geometria solida (costruzioni con riga e compasso)*
- *Utilizzo del software geogebra*
- *Prematematica alla scuola materna, l'insegnamento di base alla scuola primariaalla luce delle intuizioni montessoriane, e dei suoi materiali.*

Altre eventuali osservazioni

1. *Ritengo che il corso sia stato di grande stimolo.*

2. *Insegnando alle medie ritengo più utile una didattica che usi degli strumenti per dedurre conoscenze già acquisite.*
   Dopo la mia esperienza trentennale e in vari ordini di scuola e sull'handicap (asilo nido, scuola materna, scuola primaria, scuola secondaria), ho maturato la convinzione che la Montessori non è affatto conosciuta, e che senza dover essere per forza montessoriani, specializzati a corsi specifici, molte delle sue intuizioni costituisconola base per prevenire lacune sull'apprendimento di base della matematica.L'università non prepara sufficientemente alla didattica e le recenti tendenze alle pseudocertificazioni (DSA, BES, dislessia discalculia...) rilevano le grandi lacune di formazione degli insegnanti e il dover giustificare il livello bassissimo di preparazione degli alunni in uscita dai vari ordini di scuola