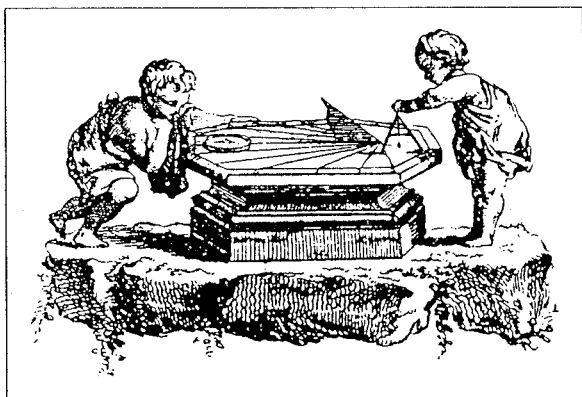




Modelli fisici per la matematica: sulle sezioni del cilindro retto.

Marcello Pergola, Carla Zanolì, Annalisa Mertinez, Marco Turrini

Riassunto L'articolo presenta alcuni modelli fisici e strumenti meccanici, scelti fra quelli utili per lo studio delle coniche: si accenna alla possibilità di organizzare attorno ad essi attività didattiche non solo attente agli aspetti tecnici, ma aperte anche alla dimensione storica del pensiero matematico.

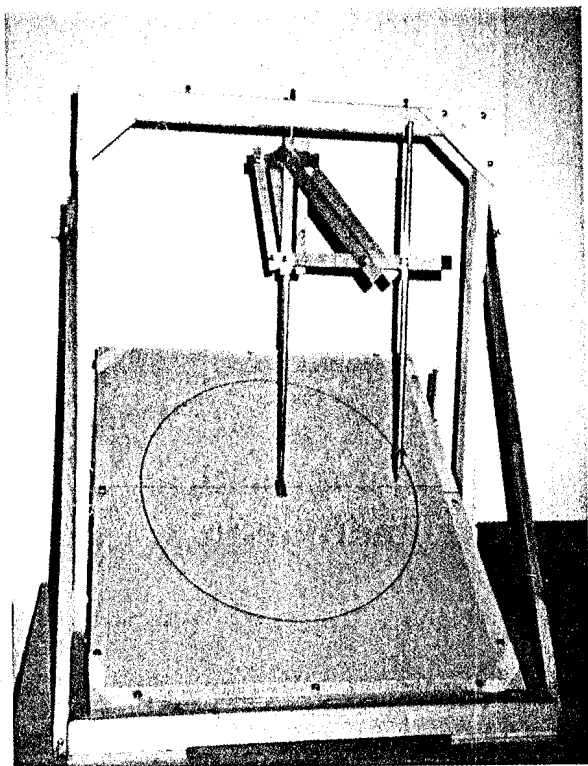
Abstract The aim of this article is to present some mathematical models and mechanical curve-tracing tools related to conic sections. The authors briefly discuss how to use them to organise some didactic activities involving both mathematical aspects and the historical development of Mathematics as well.

Marcello Pergola
e-mail: permon@iol.it

Carla Zanolì
e-mail: czanolì@tiscali.it

Annalisa Martinez

Marco Turrini



1) Tra i matematici nessuno oggi dubita di questo fatto: che si può ottenere una ellisse sia come sezione (piana) di un cono, sia come sezione (piana) di un cilindro (a base circolare). Ma non è stato sempre così¹. Il geometra greco Sereno (IV secolo d.C.) dedicò alle sezioni del cilindro un intero trattato². Leggiamone insieme l'incipit.

“Poiché, amico Ciro, ho notato che tra gli esperti di geometria molti ritengono la sezione obliqua del cilindro diversa dalla sezione conica conosciuta come ellisse, mi sono convinto della necessità di non lasciare in questo errore né essi né chi, da essi persuaso, giungesse a crederci. In verità si dovrebbe da parte di tutti ritenere assurdo che dei geometri si pronuncino su un qualsiasi problema geometrico senza fornire dimostrazioni e ricerchino solo l'apparenza del vero: ciò ripugna allo spirito della geometria. Comunque sia, siccome essi hanno quell'opinione, mentre noi non la condividiamo, dimostrerò qui in modo

rigoroso che tanto dal cilindro quanto dal cono (purché i due solidi siano tagliati opportunamente, non in modo qualsiasi) nascono non solo sezioni della stessa forma, ma proprio del tutto identiche”.

La dimostrazione di Sereno (che ricalca stile e metodi del celebre trattato di Apollonio sulle coniche) è lunga e complessa. Noi (se non vogliamo ricorrere alla geometria proiettiva, in cui la distinzione tra cono e cilindro è inessenziale), possiamo comunque cavarcela rapidamente, almeno nel caso dei cilindri rotondi, usando un teorema stabilito da Quetelet e Dandelin nel 1822³.

Il modello fisico illustrato in fig. 1 (tubo cilindrico di plexiglas con due sfere inscritte tangenti al piano secante) mostra infatti subito che congiungendo i punti di contatto (A, B) tra sfere e piano secante a un punto (P) della curva sezione si ottengono due segmenti (AP, BP) la cui somma (qualunque sia P) è costante, perché uguale alla distanza (DE) dei piani paralleli cui appartengono i cerchi di contatto tra sfere e cilindro. A e B sono i fuochi dell'ellisse. Questa proprietà dei fuochi (già nota ad Apollonio, che la deduce per altra via)⁴ caratterizza tutte le ellissi, anche quelle ottenute da coni.

Il modello illustrato in fig. 2 (da un cilindro circolare retto di legno, sezionato obliquamente, viene separato lo “spicchio” visibile in figura mediante un taglio, parallelo alla base, passante per il centro della sezione) permette ora di ricavare facilmente un'altra proprietà della ellisse, che richiameremo, nel seguito, col simbolo (#).

Se una circonferenza ha un diametro coincidente con l'asse minore di una ellisse, allora le corde della ellisse e della circonferenza uscenti da uno stesso punto di quel diametro e ad esso perpendicolari stanno fra loro in rapporto costante. In modo più sbrigativo: dilatando le ordinate di una circonferenza mediante un fattore costante (> 1) si ottiene un'ellisse.

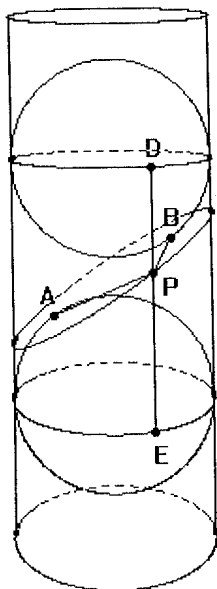


fig. 1: $AP=PE$; $BP=PD$: condotte da un punto P le due tangenti a una sfera, i segmenti compresi tra P e i punti di contatto sono uguali

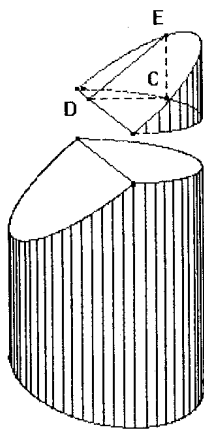


fig. 2: $ED:CD=\text{costante}$. Infatti i triangoli ECD, giacenti su piani paralleli alle generatrici del cilindro, sono tutti simili fra loro

AB, durante il movimento si riscopre la proprietà (#)

Ma altri ellissografi, pur usando la medesima proprietà, “lavorano” invece nel piano. Facciamo due esempi, presi da trattati del XVII secolo.

Un compasso OVS ($OV=VS$) appoggiato sul foglio in cui si disegna, (fig.6) ha una punta imperniata in O (punto fisso); l'altra punta S scorre avanti e indietro lungo una scanalatura passante per O. Una matita, infilata nel foro E (praticato su VS in un punto qualsiasi) descrive una ellisse (Van Schooten, 1657)⁷.

Su una manovella ruotante attorno al perno O (fig.7) si fissino due punti P e Q; scelta una retta r passante per O, si traccino per P e per Q altre due rette, l'una parallela, l'altra perpendicolare a r ; la loro intersezione E descrive una ellisse (De la Hire, 1685)⁸.

Non intendiamo qui discutere le dimostrazioni dei due autori (ben diverse da quella che proporremo noi), né le differenze di stile e finalità dei loro discorsi.

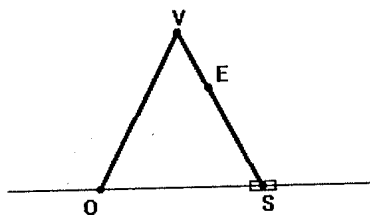


fig.6

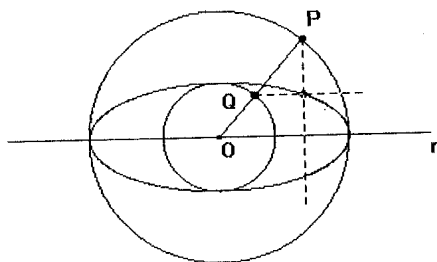


fig.7

Osserviamo soltanto che mentre Van Schooten intende costruire effettivamente uno strumento (e dà istruzioni per fabbricarlo), De La Hire, più che a tracciare la curva “per moto continuo”, pensa a una costruzione per punti (con riga e compasso): egli è sicuro di ricavare così un grafico migliore di quelli ottenuti con meccanismi artigianali (in lui il movimento è ormai soltanto mentale).

Per leggere, nelle due “macchine”, la proprietà (#) possiamo accoppiarle

come in fig.8. PF e QH sono perpendicolari ad r , PE è parallela ad r , $OV=VS$, quindi $PV=VE=VQ$.

Risulta $EK:PK=HO:FO=OQ:OP=\text{costante}$, dunque la curva tracciata è in ogni caso una ellisse. Osservando poi che è anche $QH:EH=QH:PF=OQ:OP$, si ricava: riducendo le ordinate di una circonferenza secondo un rapporto costante (<1) si ottiene una ellisse (che ha il diametro della circonferenza come asse maggiore).

Questo enunciato – che equivale alla (#), ma in certo senso la “completa” – era noto anche ad Archimede⁹.

4) Altri due esempi, più recenti.

APBQ è un rombo articolato (fig.9), C e D sono cursori che scorrono entro una scanalatura s , fissa. È inoltre $QC=QD=d$, $AP=a$. Qualunque sia la configurazione dello strumento la retta PQ è normale ad s ; si ha sempre $SQ:PS=d:(2a-d)=\text{costante}$ (lasciamo al lettore la facile dimostrazione). I punti P e Q si muovono nel piano con due gradi di libertà, ma se ancoriamo uno di essi a una manovella in modo da costringerlo a percorrere una circonferenza, allora l'altro – sempre in base alla (#) – descrive una ellisse, e può essere usato come tracciatore per disegnarla (Delaunay, 1895).¹⁰

Il secondo esempio (Parré, 1973)¹¹ corrisponde allo schema di fig.10. Si tratta di due rombi articolati, realizzati con 6 aste metalliche; le due piú lunghe si incrociano in S, punto fissato su una settima asta m (libera di muoversi nel piano) sulla quale, a destra e a sinistra di S, sono praticate due scanalature in cui scorrono P e Q. Anche in questo caso, è ovvio, $QS:PS = \text{costante}$; sicché se ad S è applicato un cursore che, vincolato a una scanalatura s , obblighi m a traslare in direzione perpendicolare ad s , si ottiene uno strumento

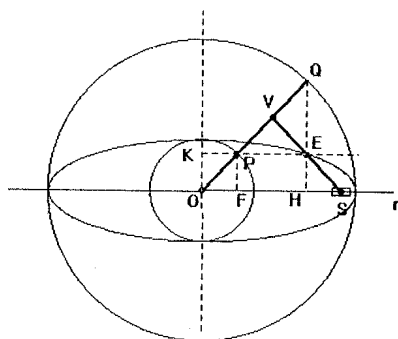
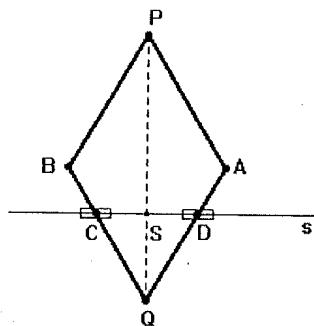


fig.8

fig.9: $QC=QD=d$; $AD=a$

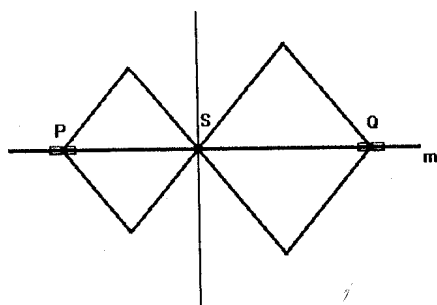


fig.10

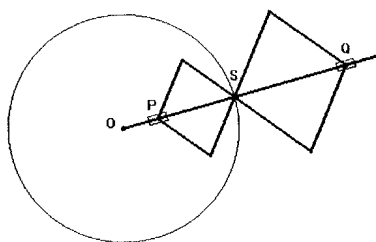


fig.11

che equivale a quello precedente. Ma si può anche costringere S a una traiettoria circolare, impernando m in O (fig. 11): allora a ogni figura interna alla circonferenza, descritta da P, ne corrisponde un'altra, tracciata da Q, di forma inattesa e sorprendente.

La grande distanza temporale che separa questi due meccanismi da quelli rivisitati nei paragrafi precedenti corrisponde al diverso contesto teorico nel quale si sono originati (è necessario, per comprenderli appieno, possedere alcune informazioni sulle trasformazioni geometriche), e alla maggiore ampiezza del campo di esperienza a cui fanno riferimento (che include l'osservazione di ombre solari e di immagini riflesse da specchi).

5) Ne parleremo ancora, dedicando spazio anche all'uso didattico di queste e di numerose altre "macchine". Ma alcuni fatti dovrebbero già risultare evidenti da questa brevissima rassegna.

- I modelli fisici possono essere usati come porta di ingresso verso la dimensione storica del pensiero matematico
- Se le leggi e i concetti incorporati negli strumenti offerti agli allievi non sono subito resi espliciti, ma viene lasciato spazio alla ricerca, si costituisce un terreno operativo-sperimentale particolarmente adatto a produrre congetture, che poi saranno discusse e validate (buona introduzione al pensiero teorico, alle tecniche della dimostrazione)
- Attraverso opportuni modelli fisici si può mettere in evidenza la solidarietà che lega lo spazio tridimensionale al piano, e usarla per accrescere la "visibilità" intuitiva di molti enunciati.

Aggiungiamo infine che conviene sempre accompagnare la manipolazione di oggetti reali con quella dei corrispondenti oggetti virtuali, simulati al com-

puter (esistono ormai diversi software adatti); le simulazioni (animazioni) si situano in una zona intermedia tra la libertà completa dei movimenti mentali a cui le configurazioni geometriche possono essere sottoposte, e la rete dei vincoli che gli "impedimenti della materia" impongono ai meccanismi costruiti con legno o metallo. Il confronto solleva interessanti problemi che riguardano il rapporto matematica-realtà, e abitua a riconoscere la matematica nascosta in molti oggetti d'uso quotidiano.

I modelli descritti sono conservati presso il Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia naturale e della Strumentazione Scientifica della Università di Modena e Reggio Emilia.
(vedi <http://www.museo.unimo.it/theatrum>)

Marcello Pergola, Carla Zanoli, Annalisa Martinez, Marco Turrini

NOTE

- Alcuni ritenevano che le ellissi ottenute da un cono non potessero avere centro di simmetria. Cfr.: Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A., 1999, *Semiotic Mediation: from History to the Mathematics Classroom, For the learning of Mathematics 19,2* FLM Publishing Association, Kingston, Ontario, Canada
- Serenus Antinoensis, *De Sectione Cylindri*, ed. Heiberg, Lipsia 1896
- Dandelin G., 1822, *Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique, Nouvelles Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Bruxelles*, II, 169-202
- Apollonii Pergaei ed. Heiberg, Lipsia 1896 (III, prop. 52)
- Van Schooten F., *Exercitationum Mathematicarum liber IV*, ex officina J. Elsevirii, 1657 pag. 340
- Descartes R., *Cogitationes Privatae*, ed. A. Tannery, vol. X, pag. 233
- Van Schooten F., *Op. cit.*, pag. 309 e 322
- De la Hire Ph., 1685, *Sectiones Conicae*, apud S. Michallet, Paris, pag. 199
- Archimede, *Opere (Conoidi e Sferoidi)*, ed. UTET 1988 (prop. 4, pag. 255: Archimede usa il teorema per ricavare l'area dell'ellisse)
- Delaunay M.N., *Sur quelques nouveaux mécanismes, Bulletin des Sciences Mathématiques (Mélanges)*, 1895, pagg. 140-142.
- Citato in Baltruaitis J., 1990, *Anamorfosi*, Adelphi, MI